I.N.S.A. de RENNES **20 janvier 2015**

DEVOIR SURVEILLÉ TRONC COMMUN 3ème année MATHÉMATIQUES

Durée : 2h

Documents, appareils électroniques (portables, calculatrices, etc...) interdits

Nom : **Prénom :**

Département :

Groupe :

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

La question 7 est plus délicate.

Intégration et transformée de Fourier

1. Soit $f(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2\,(x^2+i)}}{x^2+i}\,dx$, $t>0$. Alors $f'(\sqrt{\pi})$ est égale à

☐ $-2\sqrt{\pi}$ ☐ -2 ☐ $-\sqrt{\pi}$ ☐ -1 ☐ 1 ☐ $\sqrt{\pi}$ ☐ 2 ☐ $2\sqrt{\pi}$

2. L'intégrale double $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ est égale à

☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ π ☐ 2π

3. On note $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et $L^2(I)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I. Alors

☐ $\frac{1}{\sqrt{x|\ln x|}} \in L^1(]0,1[)$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{x}\ln x} \in L^1(]0,1[)$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{\ln x}\big(1+x\sqrt{\ln x}\big)} \in L^1(]1,+\infty[)$

☐ $\frac{1}{\sqrt{x|\ln x|}} \in L^2(]0,1[)$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{x}\ln x} \in L^2([2,+\infty[)$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{\ln x}\big(1+x\sqrt{\ln x}\big)} \in L^2(]1,+\infty[)$

4. La transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction $f(x) := (4\pi^2x^2-\pi)\,e^{-\pi x^2}$, vérifie

☐ $\hat{f}=-if$ ☐ $\hat{f}=-2f$ ☐ $\hat{f}=-f$ ☐ $\hat{f}=f$ ☐ $\hat{f}=2f$ ☐ $\hat{f}=if$

5. À l'aide du théorème de Plancherel, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,dx$, pour $a,b>0$, est égale à

☐ $\pi(a+b)$ ☐ $2\pi(a+b)$ ☐ $\pi\min(a,b)$ ☐ $2\pi\min(a,b)$ ☐ $\pi\max(a,b)$ ☐ $2\pi\max(a,b)$

6. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $(f*f)(x) = xf(x)$ pour (presque) tout $x\in\mathbb{R}$, si $f(x)$ est égale à

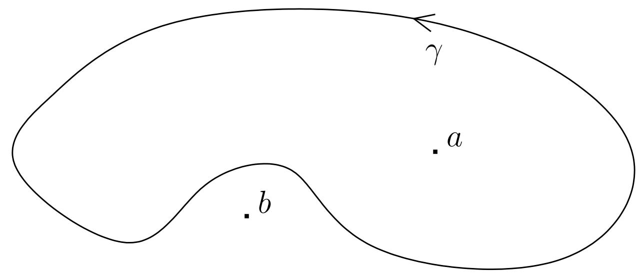
☐ $e^{-|x|}$ ☐ $1_{\mathbb{R}_+}(x)\,e^{-x}$ ☐ $-1_{\mathbb{R}_+}(x)\,e^{-x}$ ☐ $1_{\mathbb{R}_-}(x)\,e^{x}$ ☐ $-1_{\mathbb{R}_-}(x)\,e^{x}$ ☐ $1_{\mathbb{R}_+}(x)\,e^{-2x}$

7. En utilisant le théorème de Fubini et la dérivée de $g(y) := \ln\big(1+2y+2\sqrt{y^2+y}\big)$, $y\geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+a+ax^2)}{1+x^2}\,dx$ pour $a\geq 0$, est égale à

☐ $\frac{1}{2}\,g(a)$ ☐ $g(a)$ ☐ $2\,g(a)$ ☐ $\frac{\pi}{2}\,g(a)$ ☐ $\pi\,g(a)$ ☐ $2\pi\,g(a)$

Analyse complexe

8. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et γ un chemin représenté sur le dessin ci-dessous. On considère $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$, $J = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$ et $K = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-b}dz$.



- [ ] $I = 0$
- [ ] $I = 2\pi \mathrm{i} f(a)$
- [ ] $I = f(a)$
- [ ] I n'existe pas.

- [ ] $J = 0$
- [ ] $J = 2\pi \mathrm{i} f'(a)$
- [ ] $J = f'(a)$
- [ ] J n'existe pas.

- [ ] $K = 0$
- [ ] $K = 2\pi \mathrm{i} f(a)$
- [ ] $K = -2\pi \mathrm{i} f(a)$
- [ ] K n'existe pas.

9. Soit $g(z) = \dfrac{z}{z+2}$. Le développement en série entière de g en $z = \mathrm{i}$ est

- [ ] $\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} z^n$
- [ ] $\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(2+\mathrm{i})^{n+1}} (z-\mathrm{i})^n$
- [ ] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} z^n$
- [ ] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(2+\mathrm{i})^{n+1}} (z-\mathrm{i})^n$
- [ ] $\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1+\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})^{n+1}} (z-\mathrm{i})^n$
- [ ] il n'existe pas.

10. Le rayon de convergence R de la série entière obtenue dans la question 9 est :

- [ ] il n'existe pas
- [ ] 0
- [ ] 1
- [ ] $\sqrt{3}$
- [ ] 2
- [ ] $\sqrt{5}$
- [ ] $+\infty$.

11. Soit $h(z) = \dfrac{-\mathrm{i}\, z}{(2z^2 - 5z + 2)^2}$. Alors la fonction h

- [ ] n'est holomorphe nulle part
- [ ] est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- [ ] est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{2}, 2\}$
- [ ] est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{1}{2}, -2\}$
- [ ] est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$
- [ ] est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{2\}$

12. Combien vaut $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 4\cos\theta)^2}$?

- [ ] 0
- [ ] 2π
- [ ] $\dfrac{\pi}{9}$
- [ ] $-\dfrac{10\pi}{27}$
- [ ] $\dfrac{10\pi}{27}$
- [ ] $\dfrac{5\mathrm{i}}{27}$
- [ ] $-\dfrac{5\mathrm{i}}{27}$
- [ ] $+\infty$

Correction du DS de janvier 2015
Tronc Commun 3ème année – Mathématiques

1. En dérivant sous l'intégrale et en notant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2t}$, on a $f'(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$.

2. En passant en coordonnées polaires on obtient π.

3. Deux bonnes réponses $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x|\ln x|}} \in L^1(]0,1[)$ et $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}\ln x} \in L^2([2,+\infty[)$.

4. Une seule bonne réponse $\hat{f} = -f$, en utilisant les relations entre dérivée et transformée de Fourier et le fait que $e^{-\pi x^2}$ est un point fixe de la transformée de Fourier.

5. Du fait que $\widehat{1_{[-a,a]}}(x) = \dfrac{\sin(2\pi a x)}{\pi x}$, le théorème de Plancherel donne $\pi\min(a,b)$.

6. Trois bonnes réponses $f(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x)\,e^{-x}$, $f(x) = -1_{\mathbb{R}_-}(x)\,e^{x}$ et $f(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x)\,e^{-2x}$, en appliquant directement la définition de la convolution ou en prenant la transformée de Fourier de $(f*f)(x) = xf(x)$.

7. Par Fubini-Tonelli on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+a+ax^2)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} dx \int_0^a \frac{dy}{1+y+yx^2} = \int_0^a dy \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+y+yx^2} = \frac{\pi}{2}\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{y^2+y}} = \frac{\pi}{2}\,g(a).$$

8. Par la formule de Cauchy, $I = 2\pi \mathrm{i} f(a)$. Par dérivation de la formule de Cauchy, $J = 2\pi\mathrm{i} f'(a)$. Comme $z \mapsto f(z)/(z-b)$ est holomorphe sur le compact à bord délimité par γ, $K = 0$.

9. On a $\displaystyle\frac{z}{z+2} = (\mathrm{i}+z-\mathrm{i})\frac{1}{2+\mathrm{i}}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{2+\mathrm{i}}} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(2+\mathrm{i})^{n+1}}(z-\mathrm{i})^n$.

10. Avec la règle de d'Alembert ou géométriquement (en remarquant que g est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-2\}$), on trouve $R = \sqrt{5}$.

11. $5z - 2z^2 - 2 = -2(z-2)(z-\frac{1}{2})$ donc h est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{\frac{1}{2}, 2\}$, les points $\frac{1}{2}$ et 2 étant des pôles d'ordre 2.

12. L'intégrale vaut $\frac{10\pi}{27}$. Pour la calculer on introduit

$$\frac{1}{5-4\frac{z+z^{-1}}{2}}\,\frac{1}{iz} = \frac{-\mathrm{i}\,z}{(5z-2z^2-2)^2} = \frac{-\mathrm{i}\,z}{4(z-2)^2(z-\frac{1}{2})^2} = h(z)$$

où h est la fonction de la question précédente. Il suit $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta} = \int_{C(0,1)^+} h(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Rés}(h,1/2) = \frac{10\pi}{27}$, le résidu étant calculé en faisant par exemple un développement limité à l'ordre 1 au point $z = \frac{1}{2}$ de $(z-\frac{1}{2})^2 h(z) = -\mathrm{i}\,z/(4(z-2)^2)$.