

Chapitre 5 : Fonctions à plusieurs variables

Olivier Ley
IRMAR, INSA de Rennes

Introduction

Une fonction $f : E \rightarrow F$ est un procédé qui permet d'associer, à tout élément de l'ensemble de départ E , un unique résultat dans l'ensemble d'arrivée F ¹.

Jusqu'à maintenant (lycée et 1A), vous avez essentiellement travaillé avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions d'1 variable à valeur numérique :

- c'est le modèle le plus simple et un outil de base,
- on peut faire des dessins.

Dans les applications, les fonctions dépendent rarement d'une seule variable

- $T(t)$: la température au sommet du Mont-Blanc en fonction du temps : 1 variable
- $T(x, y, t)$ la température au point de coordonnées (x, y) au temps t : 3 variables
- Loi des gaz parfaits : $P = P(n, T, V) = \frac{nRT}{V}$: 3 variables
- Valeur d'un stock en fonction des références en magasin : des milliers de variables

L'**objectif de ce cours** est d'étendre l'étude des fonctions d'une variable (régularité, variations, tracé) à celles des **fonctions de plusieurs variables** et d'introduire des applications importantes de l'étude des fonctions pour l'ingénieur : l'**optimisation** et les **EDP** (Équations aux dérivées partielles).

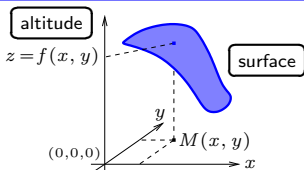
1. On dit que tout élément de E a au plus une image dans F

On veut étudier les fonctions numériques à n variables

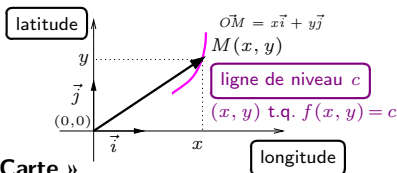
$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

Dans la suite, pour simplifier, on considèrera surtout les fonctions à 2 variables² car on peut encore visualiser certaines choses.³ On utilisera beaucoup l'exemple modèle de la **fonction altitude**

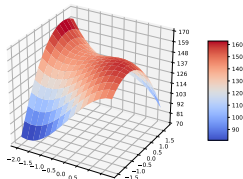
$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ M(x, y) \mapsto z = f(x, y) = f(M) \end{array}$$



« Relief »

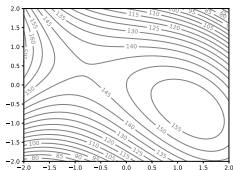


« Carte »



Exemple concret :

Tracé de $f(x, y) = 10\left(-\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + 15\right)$ avec python



2. car la difficulté principale est de passer d'une seule variable à plusieurs.
3. ce qui n'est plus possible avec plus de variables.

Sommaire

- Introduction
- 1 Notion de topologie normée dans \mathbb{R}^2
- 2 Continuité des fonctions à plusieurs variables
- 3 Différentiabilité des fonctions à plusieurs variables
- 4 Fonctions C^1 (continûment différentiables) et C^k
- 5 Changement de variables en polaires
- 6 Formule de Taylor
- 7 Extrema des fonctions à plusieurs variables
- 8 Introduction à l'optimisation sous contrainte

1. Notion de topologie normée dans \mathbb{R}^2

But : définir une distance dans \mathbb{R}^2 .

Définition 1 (Norme et distance euclidienne)

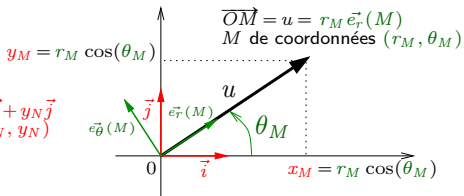
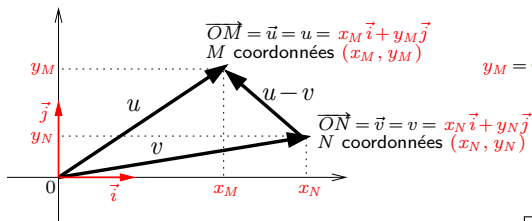
Soient 2 vecteurs $u = \overrightarrow{OM}(x_M, y_M)$ et $v = \overrightarrow{ON}(x_N, y_N)$.

- Norme euclidienne de u : $\|u\| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$
- Distance euclidienne de M à N : c'est la distance usuelle dans le plan $d(M, N) = \|u - v\| = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$

« Coordonnées cartésiennes »

(voir aussi page 30)

« Coordonnées polaires »

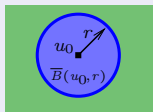
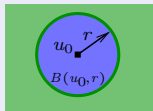


exo $\vec{e}_r(M) = \cos(\theta_M) \vec{i} + \sin(\theta_M) \vec{j}$
 $\vec{e}_\theta(M) = -\sin(\theta_M) \vec{i} + \cos(\theta_M) \vec{j}$

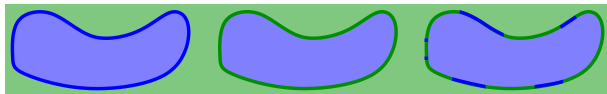
$$r_M = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}, \quad \cos(\theta_M) = \frac{x_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}$$
$$\sin(\theta_M) = \frac{y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}$$

Définition 2 (Boules, voisinages, ouverts, fermés, bornés, compacts)

- $B(u_0, r) = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u - u_0\| < r\}$ est la **boule ouverte** de centre $u_0 \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$.
- $\overline{B}(u_0, r) = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u - u_0\| \leq r\}$ est la **boule fermée** de centre $u_0 \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$.
- Une partie V de \mathbb{R}^2 est un **voisinage** d'un vecteur u s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(u, \varepsilon) \subset V$.
- Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est **ouvert** si :
c'est un voisinage de chacun de ses points
 $\Leftrightarrow \forall u \in \Omega, \exists \varepsilon > 0$ tel que $B(u, \varepsilon) \subset \Omega$
- Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^2$ est **fermé** si son complémentaire $F^C = \mathbb{R}^2 \setminus F = \{u \in \mathbb{R}^2 : u \notin F\}$ est ouvert.
- Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est **borné** si : $\exists R > 0$ tel que $A \subset B(0, R)$
- Un sous-ensemble non vide $K \subset \mathbb{R}^2$ est **compact** si K est fermé et borné.



« Un ensemble fermé possède toute sa frontière et un ensemble ouvert ne possède aucun point de sa frontière. »



A fermé

A ouvert

A ni fermé, ni ouvert

Définition 3 (Convergence d'une suite de vecteurs)

On dit que la suite de vecteurs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $u \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \|u_n - u\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon : u_n \in B(u, \varepsilon)$

Théorème 1 (Caractérisation des fermés avec les suites)

$F \subset \mathbb{R}^2$ est un fermé si pour toute suite de F qui converge vers un certain $u \in \mathbb{R}^2$, alors en fait $u \in F$ (les limites de suites d'éléments de F restent dans F).

Représenter les ensembles et prouver les propriétés

- ❶ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ est un voisinage de $(\frac{1}{2}, 1)$ mais pas de $(0, 0)$.
- ❷ $B((x_0, y_0), r)$ est un ouvert borné.
- ❸ $\overline{B}((x_0, y_0), r)$ est fermé et borné (donc compact).
- ❹ \emptyset et \mathbb{R}^2 sont à la fois ouverts et fermés.
- ❺ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$ est un ouvert non borné.
- ❻ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ est un fermé non borné.
- ❼ $\{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi\}$ est compact.
- ❽ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ est compact.
- ❾ $\{(0, 0)\}$ et $[0, 1] \times [0, 1]$ sont compacts.
- ❿ $[0, 1[\times]0, 1]$ n'est ni fermé, ni ouvert.
- ⓫ $u_n \rightarrow u$ alors $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné mais la réciproque est fausse.

2. Continuité des fonctions à plusieurs variables

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction ⁴

$$\begin{array}{l} f : \Omega \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ u = (x, y) \mapsto f(x, y) = f(u) \end{array}$$

Définition 4 (Continuité d'une fonction à plusieurs variables)

f est continue en $\bar{u} \in \Omega$ si l'une des conditions équivalentes ci-dessous est vraie

❶ $f(u) \xrightarrow{u \in \Omega, u \rightarrow \bar{u}} f(\bar{u})$

❷ $|f(u) - f(\bar{u})| \xrightarrow{u \in \Omega, \|u - \bar{u}\| \rightarrow 0} 0$

❸ $|f(u) - f(\bar{u})| \leq \epsilon(\|u - \bar{u}\|)$ pour tout $u \in V \cap \Omega$ où V est un voisinage de \bar{u} dans \mathbb{R}^2 et $\epsilon(t)$ est une fonction (d'1 variable) telle que $\epsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

❹ (Caractérisation avec les suites) Pour toute suite (u_n) d'éléments de Ω , si $u_n \rightarrow u$, alors $f(u_n) \rightarrow f(u)$.

❺ (Déf. de base) $\forall \epsilon > 0, \exists \eta_\epsilon > 0 : \forall u \in B(\bar{u}, \eta_\epsilon) \cap \Omega, |f(u) - f(\bar{u})| \leq \epsilon$.

Si f est continue $\forall \bar{u} \in \Omega$ on dit que f est continue sur Ω et on note $f \in C(\Omega)$.

« $u \rightarrow \bar{u}$ dans Ω » signifie donc $\|u - \bar{u}\| = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} \rightarrow 0$ avec $u = (x, y) \in \Omega$.

4. ⚠ On confondra les points (x, y) et les vecteurs u dans les notations.

Remarques sur la continuité

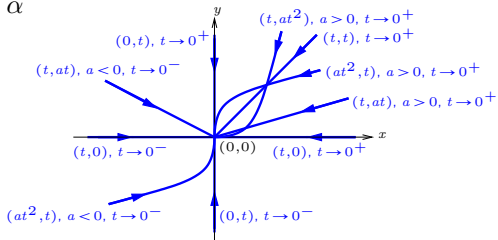
- La différence avec la continuité des fonctions d'1 variable vient du fait que « $u \rightarrow \bar{u}$ dans \mathbb{R}^2 » est plus compliqué à gérer que « $t \rightarrow \bar{t}$ dans \mathbb{R} » : dans \mathbb{R} , on peut essentiellement se rapprocher « à gauche ou à droite » d'un point alors que dans \mathbb{R}^2 , il y a beaucoup de directions, on peut « zigzaguer », « tourner autour », etc.
- ⚠ On ne peut pas se ramener de 2 variables à 1 variable « en gelant 1 variable ». ⁵ Plus précisément, si les fonctions d'1 variable $x \mapsto f(x, \bar{y})$ et $y \mapsto f(\bar{x}, y)$ sont continues respectivement en \bar{x} et \bar{y} , cela n'implique pas que la fonction de 2 variables $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est continue en (\bar{x}, \bar{y}) , cf. Exercice page 14.
- La Définition 4 ③ permet de se ramener au cas d'1 variable d'une certaine façon, quitte à établir une inégalité. C'est un critère pratique, cf. Exercice page 15.
- On pourra aussi penser à passer aux coordonnées polaires pour établir la continuité, cf. Exercice page 15.

5. La théorie des fonctions à plusieurs variables est donc plus compliquée que celle des fonctions d'1 variable.

Remarques sur la continuité (suite)

- **Recette pour prouver que $f(x, y)$ est non-continue en un point (\bar{x}, \bar{y}) :**
Il suffit d'exhiber une suite (x_n, y_n) telle que $(x_n, y_n) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ quand $n \rightarrow +\infty$ et pourtant $f(x_n, y_n)$ ne converge pas vers $f(\bar{x}, \bar{y})$.
De façon équivalente, on peut exhiber une courbe paramétrée⁶ $(x(t), y(t))$ telle que $(x(t), y(t)) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ quand $t \rightarrow \bar{t}$ et pourtant $f(x(t), y(t))$ ne tend pas vers $f(\bar{x}, \bar{y})$.

En général, on commence par tester avec des courbes paramétrées très simples. Par exemple, imaginons, qu'on veuille montrer que $f(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$. On calculera les limites de $f(x(t), y(t))$ pour des courbes paramétrées du type $(x(t), y(t)) = (t, at)$, $(t, 0)$, $(0, t)$, (t, at^α) , (at^α, t) , etc. pour différentes valeurs de a , α et pour $t \rightarrow 0^+$ ou $t \rightarrow 0^-$.
Cf. Exercice page 14.



Théorème 2 (Propriétés générales)

- 1 (Projections) Les fonctions $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .
- 2 (Somme, produit) Si f et g sont continues en \bar{u} (sur Ω), alors $f + g$, constante $\times f$ et $f \times g$ sont continues en \bar{u} (sur Ω).
- 3 (Quotient) Si f et g sont continues en \bar{u} (sur Ω) et si $\underline{g(\bar{u})} \neq 0$ (g ne s'annule pas sur Ω), alors $\frac{f}{g}$ est continue en \bar{u} (sur Ω).
- 4 (Composition) Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues alors $\varphi \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

exo Une conséquence immédiate est la **continuité** sur \mathbb{R}^2 de tous les **polynômes** (somme et produits de constantes, x et y ; cf. par exemple $f(x, y)$ au bas de la page 3).

Théorème 3 (Continuité sur un compact : application)

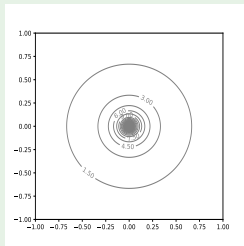
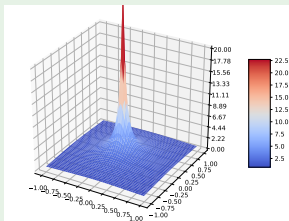
Si f est continue sur un compact K de \mathbb{R}^2 alors elle est **bornée** et **atteint ses bornes** : $\sup_{(x,y) \in K} f(x, y) = \max_{(x,y) \in K} f(x, y) < +\infty$ et $\inf_{(x,y) \in K} f(x, y) = \min_{(x,y) \in K} f(x, y) > -\infty$.

C'est une extension aux fonctions à plusieurs variables d'un résultat de 1A. Ce théorème est très important pour la **recherche d'extrema**, cf. page 37.

Exercice : Étudier la continuité de $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 0$ et $x^2 + y^2 = 0$ seulement en $(0, 0)$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Étude de la continuité sur l'ensemble de définition. La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est un polynôme, elle est donc continue sur \mathbb{R}^2 (pour le voir on remarque qu'elle peut s'écrire $p_1 \times p_1 + p_2 \times p_2$ et on applique Théorème 2 ❶ et ❷). Comme $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \in [0, +\infty[$ et que $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $[0, +\infty[$, par composition (Théorème 2 ❸), $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur \mathbb{R}^2 . Finalement, par quotient (Théorème 2 ❹), f est continue sur \mathbb{R}^2 privé des points où $x^2 + y^2$ s'annule, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.



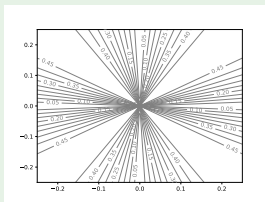
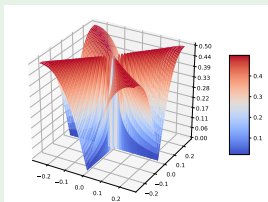
Tracé et lignes de niveau de f sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$

Exercice : Étudier la continuité de $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|}{x^2+y^2} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Continuité hors de $(0,0)$. La fonction $(x, y) \mapsto |xy|$ est continue sur \mathbb{R}^2 (par Théorème 2 ④ avec le polynôme xy et $\varphi(t) = |t|$) et la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue sur \mathbb{R}^2 (c'est un polynôme) et ne s'annule qu'en $(0,0)$. Donc par le Théorème 2 ③ sur les quotients, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Non-continuité en $(0,0)$. On remarque que les fonctions $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont continues sur \mathbb{R} (trivial car ce sont des fonctions constantes égales à 0)^a et pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$ car si on prend $(x(t), y(t)) = (t, t)$, $(t, t) \xrightarrow{t \neq 0, t \rightarrow 0} (0,0)$ et

pourtant, pour $t \neq 0$, $f(t, t) = \frac{|t^2|}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}$ ne converge pas vers $0 = f(0,0)$.
 $\Rightarrow f$ n'est pas continue en $(0,0)$.



Tracé et lignes de niveau de f sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

a. donc f restreinte aux courbes paramétrées $(x(t), y(t)) = (t,0)$ et $(0,t)$ est continue.

Exercice : Étudier la continuité de $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

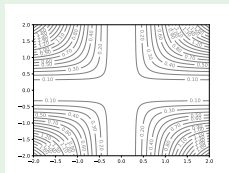
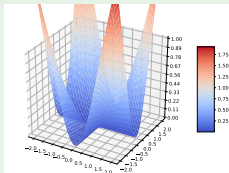
Continuité hors de (0, 0). La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme quotient de 2 polynômes dont le dénominateur $x^2 + y^2$ ne s'annule qu'en (0, 0) (Théorème 2 ③).

Continuité en (0, 0). 2 méthodes, en utilisant Déf. 4 ③ ou un passage en polaires.

Méthode 1. En utilisant $\forall a, b \in \mathbb{R}, |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on a, $\forall (x, y) \neq (0, 0)$,

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{(\frac{1}{2}(x^2 + y^2))^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = \epsilon(\sqrt{x^2 + y^2}) \text{ avec } \epsilon(t) = \frac{1}{4}t^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Méthode 2. On passe en polaires, $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = \tilde{f}(r, \theta) = \frac{r^2 \cos^2(\theta) r^2 \sin^2(\theta)}{r^2}$
 et $|f(x, y) - f(0, 0)| \leq r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ donc f est continue en (0, 0) car $(x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0$.

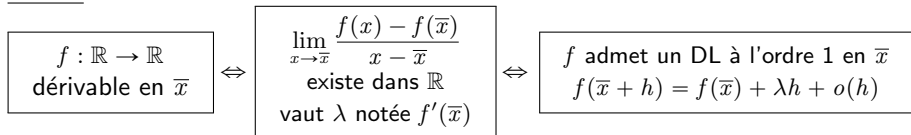


Tracé et lignes de niveau de f sur $[-2, 2] \times [-2, 2]$

a. On appelle ceci une **fraction rationnelle**.

3. Différentiabilité des fonctions à plusieurs variables

Rappel : dérivabilité des fonctions d'1 variable. ⁷



C'est la caractérisation à partir des DL que l'on utilise pour étendre la notion de dérivabilité au cas des fonctions de plusieurs variables.

Définition 5 (Différentiabilité des fonctions à plusieurs variables)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. f est **différentiable** en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ s'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \underbrace{Ah + Bk}_{\substack{\text{d\'ef} \\ \equiv df_{(\bar{x}, \bar{y})}(h, k) \\ \text{diff\'erentielle}}} + \underbrace{o(\|(h, k)\|)}_{\substack{\sqrt{h^2 + k^2} \epsilon(\sqrt{h^2 + k^2}) \\ \text{avec } \epsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0}}$

La différentielle $df_{(\bar{x}, \bar{y})}(h, k) = Ah + Bk$ est un forme **linéaire**.

⚠ $A = A(\bar{x}, \bar{y})$ et $B = B(\bar{x}, \bar{y})$ dépendent du point où la fonction est différenciée.
On va voir qu'on peut les calculer.

7. Revoir le cours de 1A sur le sujet et revoir les développements limités (DL).

Définition 6 (Dérivées partielles)

On appelle **dérivées partielles** suivant x et y , si elles existent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}+h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}, \bar{y}+k) - f(\bar{x}, \bar{y})}{k}.$$

Remarques :

- La **dérivée partielle** suivant une variable est donc la **dérivée de la fonction par rapport à cette variable en gelant l'autre variable** \Leftrightarrow **moyen de calcul pratique**.
- Les dérivées partielles sont des **dérivées directionnelles** (par rapport à la direction $\vec{i} = (1, 0)$ pour celle par rapport à x et la direction $\vec{j} = (0, 1)$ pour celle par rapport à y). On peut définir des dérivées dans toute direction $u \in \mathbb{R}^2$ par

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((\bar{x}, \bar{y}) + tu) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t}.$$

exo

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \text{ et } B = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \Leftrightarrow \quad df_{(\bar{x}, \bar{y})}(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})h + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})k$$

exo

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 y$.

1. Montrer que f est différentiable en tout $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ (« à la main » en utilisant Définition 5). Déterminer A et B .
2. Calculer les dérivées partielles et retrouver les valeurs de A et B .
3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{y})$ lorsque $u = (1, 1)$.

8. A et B apparaissent dans la Définition 5.

Théorème 4 (Propriétés)

- 1 Si f différentiable en (\bar{x}, \bar{y}) alors f est continue en (\bar{x}, \bar{y})
(⚠️ réciproque fausse).
- 2 Si f différentiable en (\bar{x}, \bar{y}) alors f admet des dérivées partielles en (\bar{x}, \bar{y})
(⚠️ réciproque fausse).

Exercice : Dérivées partielles de $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$?

$f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$ (**exo** procéder comme page 14).

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est très régulière (cf. Théorème 7 p. 24) donc les dérivées partielles existent et on les calcule en dérivant par rapport à une variable en laissant l'autre fixe :

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - x y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{remarquer la symétrie}).$$

En $(0, 0)$, il faut revenir à la Définition 6 :

$$\forall h \neq 0, \quad \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} \equiv 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

$$\forall k \neq 0, \quad \frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} \equiv 0 \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

⚠️ On remarque que les dérivées partielles sont définies sur \mathbb{R}^2 tout entier alors que la fonction n'est même pas continue en $(0, 0)$.

Définition 7 (Gradient)

Si f est différentiable en (\bar{x}, \bar{y}) alors le **gradient** de f en (\bar{x}, \bar{y}) est le vecteur

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \overrightarrow{\text{grad}} f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Rappel : produit scalaire de 2 vecteurs $u(x_u, y_u)$ et $v(x_v, y_v)$ dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Le **produit scalaire** est le nombre $u \cdot v = \langle u, v \rangle = x_u x_v + y_u y_v$ (deux notations usuelles : « \cdot » et « \langle, \rangle »).

Théorème 5

① f différentiable en $(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h, k)\|)$.

② Si f et g sont différentiable en (\bar{x}, \bar{y}) ,

$$\text{si } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \nabla(\lambda f + \mu g)(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) + \mu \nabla g(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$\nabla(fg)(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}) \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x}, \bar{y}) \nabla g(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\text{si } g(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0, \nabla \frac{f}{g}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{g(\bar{x}, \bar{y}) \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y}) \nabla g(\bar{x}, \bar{y})}{g(\bar{x}, \bar{y})^2}.$$

exo Faire la preuve des propriétés.

Remarques sur les notations

- La notation ∂ est utilisée pour la 1ère fois par Legendre⁹ en 1786. On l'utilise pour les fonctions à plusieurs variables : $\frac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée partielle par rapport à la variable x de et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est la dérivée partielle par rapport à la variable y de $f(x, y)$. Pour une fonction d'1 seule variable $f(x)$, il n'y a pas d'ambiguïté et on note la dérivée f' sans faire référence à la variable (on utilise aussi $\frac{df}{dx}$).
- Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont une « notation positionnelle » : ce qui est important n'est pas le nom des variables mais leur position, sachant que, par convention, x est utilisée à la 1ère place et y à la 2nde dans $f(\bullet, \bullet)$. Donc $\frac{\partial}{\partial x}$ signifie en réalité « dérivée par rapport à la 1ère variable » et $\frac{\partial}{\partial y}$ « dérivée par rapport à la 2ème variable ». Il serait donc peut-être plus clair de noter $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ¹⁰ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- Les projections p_1, p_2 sont notées $dx, dy : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $dx(x, y) = x$ et $dy(x, y) = y$. La différentielle s'écrit alors
$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$
.

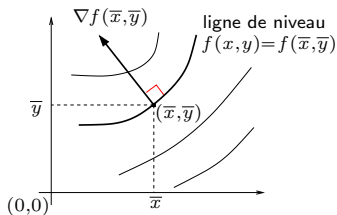
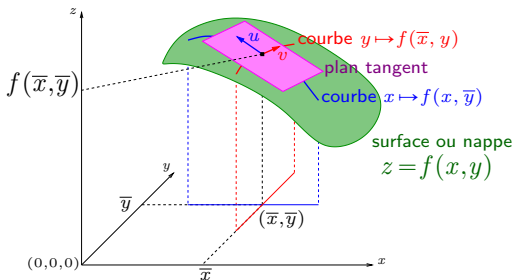
exo Une fonction d'1 variable dérivable est aussi différentiable et $df_x = f'(x)dx$.

exo Si $f(x, y) = \|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2$ alors $df = 2(xdx + ydy)$.

9. Adrien-Marie Legendre (1752–1833) mathématicien français.

10. ou même $\frac{\partial f}{\partial 1}$, $\frac{\partial f}{\partial 2}$, ou encore $D_1 f, D_2 f$.

Interprétation graphique de la différentiabilité



Équation du plan tangent à la nappe $z = f(x, y)$ au point $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$:

$$z = f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$

Il est dirigé par les vecteurs

$$\begin{cases} u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} \text{ tangent à la courbe } x \mapsto f(x, \bar{y}) \text{ tracée sur la nappe} \\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} \text{ tangent à la courbe } y \mapsto f(\bar{x}, y) \text{ tracée sur la nappe} \end{cases}$$

Le **gradient** de f en (\bar{x}, \bar{y}) est le vecteur de \mathbb{R}^2 qui **pointe dans la direction de plus grande pente**. Le gradient est **orthogonal à la ligne de niveau** de f passant par (\bar{x}, \bar{y}) , voir pages 49 et 50.

4. Fonctions C^1 (continûment différentiables) et C^k

Théorème 6 (fonctions C^1)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si les dérivées partielles de f existent et sont continues en (\bar{x}, \bar{y}) , alors f est différentiable en (\bar{x}, \bar{y}) et sa différentielle est continue en (\bar{x}, \bar{y}) . On dit que f est C^1 . Si f est C^1 en tout (\bar{x}, \bar{y}) de Ω , on note $f \in C^1(\Omega)$.

C'est un moyen pratique pour montrer que f est différentiable :

- 1 On montre l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (la plupart du temps, il suffit de dériver par rapport à x et à y) ;
- 2 On montre la continuité des fonctions de 2 variables $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

exo Montrer que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice : Montrer que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ est C^1 sur \mathbb{R}^2

On sait déjà que $f \in C(\mathbb{R}^2)$, cf. page 15.

$x \mapsto f(x, y)$ est clairement dérivable en tout x tel que $(x, y) \neq (0, 0)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et la dérivation par rapport à x donne : $\forall (x, y) \neq (0, 0), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$. En $(0, 0)$, on a

$\frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} \equiv 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. D'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Par le Théorème 2, on obtient que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et, en passant en polaires, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2r \cos(\theta) \sin^4(\theta)$ d'où $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)| \leq 2r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est également continu en $(0, 0)$. Finalement $\frac{\partial f}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2)$.

De la même façon (remarquer la symétrie), on obtient que $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2)$.

On conclut par le Théorème 6 que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Un critère pratique est d'utiliser les résultats généraux suivants¹¹

Théorème 7 (Sommes, produits, quotients et composition de fonctions C^1)

Supposons que $f, g \in C^1(\Omega)$. Alors :

- 1 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g \in C^1(\Omega)$ et $\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$,
soit, pour $\bullet = x$ ou y , $\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial \bullet}(x, y) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \bullet}(x, y) + \mu \frac{\partial g}{\partial \bullet}(x, y)$.
- 2 $fg \in C^1(\Omega)$ et $\nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g$,
soit, pour $\bullet = x$ ou y , $\frac{\partial(fg)}{\partial \bullet}(x, y) = g(x, y) \frac{\partial f}{\partial \bullet}(x, y) + f(x, y) \frac{\partial g}{\partial \bullet}(x, y)$.
- 3 Si g ne s'annule pas sur Ω , $\frac{f}{g} \in C^1(\Omega)$ et $\nabla(f/g) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$,
soit, pour $\bullet = x$ ou y , $\frac{\partial(f/g)}{\partial \bullet}(x, y) = \frac{g(x, y) \frac{\partial f}{\partial \bullet}(x, y) - f(x, y) \frac{\partial g}{\partial \bullet}(x, y)}{g(x, y)^2}$.
- 4 Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dans $C^1(\mathbb{R})$, $F = \varphi \circ f \in C^1(\Omega)$ et $\nabla F = \varphi'(f) \nabla f$,
soit, pour $\bullet = x$ ou y , $\frac{\partial F}{\partial \bullet}(x, y) = \varphi'(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial \bullet}(x, y)$.

11. Comparer avec les Théorèmes 2 et 5.

Théorème 8 (Compositions de fonctions C^1)

Supposons que $f, g \in C^1(\Omega)$. Alors :

- ❶ Si $\phi, \psi : \mathbb{R} \mapsto \Omega$ alors $\Phi(t) = f(\phi(t), \psi(t)) \in C^1(\mathbb{R})$ (fonction d'1 variable) et

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t), \psi(t)) \phi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(t), \psi(t)) \psi'(t);$$

- ❷ Si $\zeta, \eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont dans $C^1(\mathbb{R}^2)$ et $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, (\zeta(s, t), \eta(s, t)) \in \Omega$, alors la fonction de 2 variables $F(s, t) = f(\zeta(s, t), \eta(s, t)) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta(s, t), \eta(s, t)) \frac{\partial \zeta}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta(s, t), \eta(s, t)) \frac{\partial \eta}{\partial s}(s, t) \\ \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta(s, t), \eta(s, t)) \frac{\partial \zeta}{\partial t}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta(s, t), \eta(s, t)) \frac{\partial \eta}{\partial t}(s, t) \end{cases}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on se permettra d'écrire plus simplement :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial s} \\ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{cases}$$

⚠ Ces règles de calculs doivent être comprises et connues.

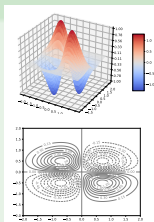
Exercices

- 1 Calculer les dérivées partielles de $f(x, y) = -10xye^{-x^2-2y^2}$

Par Théorème 7 23, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10y(2x^2 - 1)e^{-x^2-2y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 10x(4y^2 - 1)e^{-x^2-2y^2}$$

$$\text{d'où } df_{(x,y)} = 10e^{-x^2-2y^2} (y(2x^2 - 1)dx + x(4y^2 - 1)dy).$$



- 2 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Calculer les dérivées partielles de $g(s, t) = f(e^{st}, t \arctan(s))$.

Par Théorème 7 4 et Théorème 8 2, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $\forall(s, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial(e^{st})}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial(t \arctan(s))}{\partial s} = te^{st} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{t}{1+s^2} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial(e^{st})}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial(t \arctan(s))}{\partial t} = se^{st} \frac{\partial f}{\partial x} + \arctan(s) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

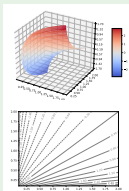
Remarque : Rigoureusement, il faudrait écrire à chaque fois $\frac{\partial f}{\partial x}(e^{st}, t \arctan(s))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(e^{st}, t \arctan(s))$. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on allège les notations.

- 3 Trouver l'ensemble de définition D_f de $f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$.
Montrer que $f \in C^1(D_f)$ et calculer ses dérivées partielles.

Solution : $D_f = (]0, +\infty[\times]0, +\infty[) \cup (]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[)$

$f \in C^1(D_f)$ par Théorème 7 34.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y}.$$



Tracés sur $]0, 2] \times]0, 2]$

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Si $f \in C^1(\Omega)$, alors les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et on peut étudier leur différentiabilité.

Définition 8 (Dérivées partielles d'ordre 2 et plus)

On appelle *dérivées partielles d'ordre 2* de f en (x, y) , si elles existent,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) \quad (\text{dérivée croisée})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) \quad (\text{dérivée croisée})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y)$$

Si ces dérivées sont continues, on dit que f est C^2 en (x, y) . Si f est C^2 sur tout Ω , on note $f \in C^2(\Omega)$.

Si f est C^2 , on peut encore étudier les dérivées suivantes. Si les dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω , on dit que $f \in C^k(\Omega)$.

Si f est assez régulière, les dérivées croisées sont égales par le lemme de Schwarz¹² (\triangle peut être faux si f n'est pas C^2 , cf. TD).

Théorème 9 (Lemme de Schwarz)

Si $f \in C^2(\Omega)$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sur Ω (égalité des dérivées croisées).

Remarque importante : Si $f \in C^k(\Omega)$, $1 \leq k \leq \infty$, on peut reproduire les Théorèmes 7 et 8 en remplaçant $C^1(\Omega)$ par $C^k(\Omega)$. Bien sûr, les formules de dérivation deviennent de plus en plus compliquées quand k augmente.

Quelle est la régularité des fonctions des Exercices page 26 ?

Pour **1**, on voit facilement, par le Théorème 7 **23** avec C^k que $f \in C^k(\mathbb{R}^2)$. Comme ceci est valable pour n'importe quel k , $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Pour **2**, comme de façon évidente, $(s, t) \mapsto e^{st}$ et $(s, t) \mapsto t \arctan(s)$ sont dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, par le Théorème 8 **2**, on voit que, dès que $f \in C^k(\mathbb{R}^2)$, alors $g \in C^k(\mathbb{R}^2)$.

Pour **3**, de même, $f \in C^\infty(D_f)$.

12. Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) mathématicien allemand.

Exercice : Calculer les dérivées partielles 2ndes de $g(s,t) = f(e^{st}, t \arctan(s))$ si $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Cette fonction a déjà été étudiée pages 26 et 28. On a calculé les dérivées 1ères de g . On continue le calcul^a en utilisant que les dérivées croisées de f sont égales car $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial g}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(te^{st} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{t}{1+s^2} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (te^{st}) \frac{\partial f}{\partial x} + te^{st} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{t}{1+s^2} \right) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{t}{1+s^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= t^2 e^{st} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{2st}{(1+s^2)^2} \frac{\partial f}{\partial y} + te^{st} \left(te^{st} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{t}{1+s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) + \frac{t}{1+s^2} \left(te^{st} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{t}{1+s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= t^2 e^{st} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{2st}{(1+s^2)^2} \frac{\partial f}{\partial y} + t^2 e^{2st} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{2t^2 e^{st}}{1+s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{t^2}{(1+s^2)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(se^{st} \frac{\partial f}{\partial x} + \arctan(s) \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (se^{st}) \frac{\partial f}{\partial x} + se^{st} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial s} (\arctan(s)) \frac{\partial f}{\partial y} + \arctan(s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= (1+st) e^{st} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{1+s^2} \frac{\partial f}{\partial y} + se^{st} \left(te^{st} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{t}{1+s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) + \arctan(s) \left(te^{st} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{t}{1+s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= (1+st) e^{st} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{1+s^2} \frac{\partial f}{\partial y} + ste^{2st} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{st}{1+s^2} + t \arctan(s) \right) e^{st} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{t \arctan(s)}{1+s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}$ par le lemme de Schwarz (Théorème 9) : inutile de recalculer !

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(se^{st} \frac{\partial f}{\partial x} + \arctan(s) \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} se^{st} \frac{\partial f}{\partial x} + se^{st} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \arctan(s) \frac{\partial f}{\partial y} + \arctan(s) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= s^2 e^{st} \frac{\partial f}{\partial x} + se^{st} \left(se^{st} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \arctan(s) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) + \arctan(s) \left(se^{st} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \arctan(s) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= s^2 e^{st} \frac{\partial f}{\partial x} + s^2 e^{2st} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2se^{st} \arctan(s) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \arctan^2(s) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

a. Calculs pénibles mais à savoir faire !

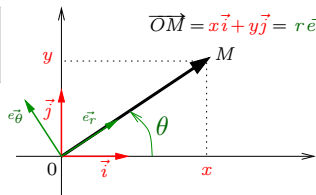
5. Changement de variables en polaires

Le changement en polaires

$$\begin{aligned}]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\}) \\ (r, \theta) &\mapsto (x(r, \theta) = r \cos(\theta), y(r, \theta) = r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

est un C^∞ difféomorphisme¹³ d'inverse

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \begin{aligned} \cos(\theta(x, y)) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin(\theta(x, y)) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad 14$$



Supposons qu'on ait une expression contenant les variables x, y , une fonction $f(x, y)$ et ses dérivées partielles ($\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, etc.) et qu'on veuille faire un changement en polaires pour obtenir une expression ne dépendant plus que de r, θ .

On commence par introduire $\tilde{f}(r, \theta) = f(x, y)$ ¹⁵

On sait remplacer x, y par les nouvelles variables. Tout le travail va consister à **écrire les dérivées partielles de f en fonction de celles de \tilde{f}** .¹⁶


13. Retenir que c'est un changement de variable très régulier sur les domaines considérés.

14. \triangle On n'a pas de formule « universelle » pour $\theta(x, y)$ a priori. Cela dépend des cas.

15. \triangle \tilde{f} et f ne sont pas la même fonction.

16. Quand on fait un changement de variables ou de fonctions, on a besoin d'exprimer l'ancien en fonction du nouveau, y réfléchir.

Changement de variables en polaires (suite)

On commence en fait par exprimer $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on inversera ensuite.¹⁷ Par le Théorème 8 , on a :


$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

exo Calculer le déterminant et l'inverse de la matrice.

D'où les **formules du changement en polaires** :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(\theta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(\theta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \end{cases} \quad 18$$

17. pour la dérivation composée Thm 8 , c'est plus simple de calculer $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \dots$ que $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \dots$

18. À connaître.

① Exprimer le gradient de f en coordonnées polaires

On a $\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$ en coordonnées cartésiennes. Pour l'exprimer en coordonnées polaires, il faut trouver a, b tels que $\nabla f(x, y) = a\vec{e}_r + b\vec{e}_\theta$.

Par (exo) $\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{cases}$, $\begin{cases} \vec{i} = \cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta \\ \vec{j} = \sin(\theta)\vec{e}_r + \cos(\theta)\vec{e}_\theta \end{cases}$ et les formules page 31,

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = (\cos(\theta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta})(\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta) + (\sin(\theta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta})(\sin(\theta)\vec{e}_r + \cos(\theta)\vec{e}_\theta)$$

$$\text{Finalement } \nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta.$$

② Calculer le laplacien ^a de f , $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en coordonnées polaires

On redérive les formules page 31,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos(\theta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos(\theta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos(\theta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\sin^2(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + 2 \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} + \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} - 2 \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\cos^2(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - 2 \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + 2 \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement } \Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}.$$

a. provient de Simon de Laplace (1749–1827) mathématicien et physicien français.

Exercice : Trouver les $f(x, y)$ solutions de l'EDP $\frac{-y}{x^2+y^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

On passe en polaires :

$$\frac{-y}{x^2+y^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-r \sin(\theta)}{r^2} \left(\cos(\theta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \right) + \frac{r \cos(\theta)}{r^2} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}.$$

Donc en coordonnées polaires, l'EDP est beaucoup plus simple : $\frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = 0$, soit encore $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = 0$, ce qui signifie que les fonctions $\tilde{f}(r, \theta)$ solutions sont les fonctions constantes par rapport à la variable θ donc ne dépendant que de r : $\tilde{f}(r, \theta) = g(r)$ pour n'importe quelle fonction d'1 variable $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

On conclut en revenant aux coordonnées cartésiennes de départ : les solutions de l'EDP sont les fonctions $f(x, y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ avec g n'importe quelle fonction $C^1(]0, +\infty[)$.

Les EDP ou Équations aux Dérivées Partielles sont l'analogie des EDO (Équations Différentielles Ordinaires du cours de 1A) pour les fonctions à plusieurs variables. D'innombrables phénomènes et systèmes peuvent être **modélisés mathématiquement à l'aide d'EDP** en électromagnétisme, gravitation, météorologie, démographie, mathématiques financières, propagation des épidémies, imagerie médicale, simulations en mécanique, ... Les **EDP sont donc un des domaines d'application privilégiés des fonctions à plusieurs variables** que vous verrez peut-être les années suivantes.¹⁹

19. Avant ça, vous verrez quelques exemples simples en TD.

Exercice : Trouver les solutions radiales de l'EDP de Laplace^a $\Delta f = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a. L'EDP de Laplace intervient dans une foule de problèmes en physique (électrostatique, mécanique, astronomie, diffusion de la chaleur, mécanique quantique,...) et est une équation modèle en mathématiques (analyse et probabilités). Les solutions sont appelées **fonctions harmoniques**.

Chercher $f(x, y)$ radiale signifie que la valeur de f ne dépend que de la distance de (x, y) à l'origine $(0, 0)$, c'est-à-dire de $\|(x, y)\| = r$. Il est donc naturel de passer en coordonnées polaires : $f(x, y) = \tilde{f}(r, \theta) = \tilde{f}(r)$ si f est radiale (indépendante de θ).

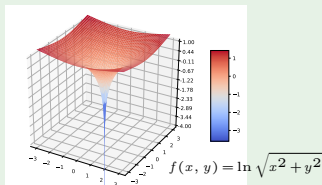
$$\text{Puis } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}}_{=0 \text{ si } \tilde{f} \text{ radiale}} = 0 \text{ sur }]0, +\infty[\times [0, 2\pi].$$

Comme \tilde{f} ne dépend que de la seule variable r , l'EDP devient l'EDO $\frac{1}{r} \tilde{f}'(r) + \tilde{f}''(r) = 0$ sur $]0, +\infty[$, qui est du 2nd ordre linéaire homogène. À priori, elle est à coefficients non constants mais en posant $y(r) = \tilde{f}'(r)$ on obtient l'EDO du 1er ordre linéaire $\frac{1}{r} y(r) + y'(r) = 0$ sur $]0, +\infty[$, qu'on sait résoudre.^a La solution est $y(r) = \frac{a}{r}$ où $a \in \mathbb{R}$ est une constante. En primitivant on obtient $\tilde{f}(r) = a \ln(r) + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.

Finalement, on revient aux coordonnées cartésiennes : les fonctions harmoniques radiales sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont

$$f(x, y) = a \ln \sqrt{x^2 + y^2} + b \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

a. cf. cours 1A.



6. Formule de Taylor

On connaît la formule de Taylor²⁰ pour les fonctions d'1 variable : si $f \in C^n(\mathbb{R})$,

$$f(\bar{x} + h) = \underbrace{f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}h^n}_{\text{Aproximation polynomiale de } f \text{ polynôme de degré } n \text{ en } h} + \underbrace{o(|h|^n)}_{\text{reste petit quand } |h| \approx 0}$$

On a le même résultat pour les fonctions de plusieurs variables. Pour ne pas compliquer, on l'écrit à l'ordre 2 (ce qui nous suffira) :

Théorème 10 (Formule de Taylor à l'ordre 2 pour les fonctions de 2 variables)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f \in C^2(\Omega)$ et $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$. Alors

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) &= f(\bar{x}, \bar{y}) \\ &+ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})h + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})k}_{\text{partie linéaire (ordre 1)}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})k^2 \right)}_{\text{partie quadratique (ordre 2)}} + \underbrace{o(h^2 + k^2)}_{\text{reste d'ordre 2}} \\ &= df_{(\bar{x}, \bar{y})}(h, k) = \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

20. Brook Taylor (1685–1781) scientifique anglais surtout connu comme mathématicien.

Remarques sur la formule de Taylor

- Le terme $f(\bar{x}, \bar{y})$ est le terme d'ordre 0 (ou constant) qui traduit la continuité de f . Le terme linéaire est un polynôme (homogène) de degré 1 en h, k et traduit la différentiabilité de f (cf. pages 16 et 21). Le terme quadratique est un polynôme (homogène) de degré 2 en h, k qui traduit une approximation plus précise de f : la surface représentant f admet un parabolôïde tangent en $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$.
- La matrice des dérivées partielles secondes $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}$ est appelée **matrice hessienne**²¹ de f en (\bar{x}, \bar{y}) et est notée $\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})$ ou $\text{Hess}(f)(\bar{x}, \bar{y})$.

exo Si f est de classe C^2 alors la matrice $\nabla^2 f(x, y)$ est symétrique (penser au Lemme de Schwarz).

exo Comprendre l'écriture $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y}) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ de la partie quadratique.

exo Démontrer la formule de Taylor en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction d'1 variable $\varphi(t) = f(\bar{x} + th, \bar{y} + tk)$.

exo Pour les courageux, écrire la formule de Taylor à l'ordre 3 pour les fonctions de 2 variables.

21. provient de Ludwig Otto Hesse (1811–1874) mathématicien allemand.

7. Extrema des fonctions à plusieurs variables

Extremum : maximum ou minimum d'une fonction numérique.

Définition 9 (Extrema globaux et locaux)

Soit Ω un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto f(x,y)$

- f admet un **maximum global** en (\bar{x}, \bar{y}) sur Ω si $\forall (x,y) \in \Omega, f(x,y) \leq f(\bar{x}, \bar{y})$.
- f admet un **minimum global** en (\bar{x}, \bar{y}) sur Ω si $\forall (x,y) \in \Omega, f(x,y) \geq f(\bar{x}, \bar{y})$.
- f admet un **maximum local** en (\bar{x}, \bar{y}) sur Ω si
 $\exists r > 0$ tel que $B((\bar{x}, \bar{y}), r) \subset \Omega$ et $\forall (x,y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), r), f(x,y) \leq f(\bar{x}, \bar{y})$.
- f admet un **minimum local** en (\bar{x}, \bar{y}) sur Ω si
 $\exists r > 0$ tel que $B((\bar{x}, \bar{y}), r) \subset \Omega$ et $\forall (x,y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), r), f(x,y) \geq f(\bar{x}, \bar{y})$.

La **recherche d'extrema** d'une fonction f est un des problèmes de base en **optimisation**. Cette branche des mathématiques est très importante pour les applications. En effet, dans les problèmes concrets, on est souvent ramené à **minimiser un coût** (d'énergie, financier, etc.) ou à **maximiser un profit**, dans différentes situations. L'étude des extrema va nous occuper à partir de maintenant.

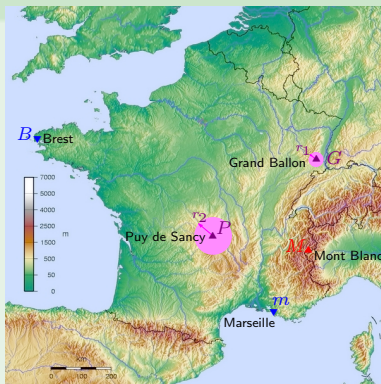
Exemple : géographie française

Un extremum global est un extremum absolu sur tout l'ensemble. Par exemple, le Mont Blanc est un maximum global de la fonction altitude f sur $\Omega = \ll \text{France} \gg$ et tout point côtier est un minimum global.

Un extremum local est un extremum relatif sur une zone assez petite entourant le point. Le sommet de toute petite colline à l'intérieur du pays est un maximum local et tout fond de vallée un minimum local.

Un extremum local est nécessairement à l'intérieur de Ω (pas sur la frontière), on doit pouvoir faire le tour sans sortir de Ω alors qu'un extremum global peut être à l'intérieur ou sur la frontière.

⚠ Un extremum global n'est donc local que s'il se trouve à l'intérieur de Ω . Un extremum local n'est pas forcément global.



Source : Wikipédia

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in \Omega, f(x, y) &\leq f(M) = 4810 \\ f(x, y) &\geq f(B) = 0 \\ f(x, y) &\geq f(m) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in B(G, r_1), f(x, y) &\leq f(G) = 1424 \\ \forall (x, y) \in B(P, r_2), f(x, y) &\leq f(P) = 1886\end{aligned}$$

Exemple : un champ en pente

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$

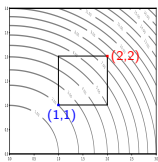
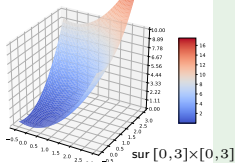
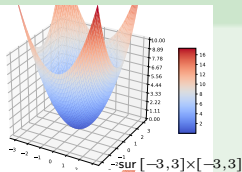
La représentation graphique de f est un **paraboloïde**

Si $\Omega = \mathbb{R}^2$

- $(0, 0)$ est un minimum global car
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x, y)$
 $\inf_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = \min_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$
- Pas de maximum global, $\sup_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = +\infty$
- $(0, 0)$ est aussi un minimum local.
- Pas de maximum local.

Si $\Omega = [1, 2] \times [1, 2]$ « champ carré en pente »

- $(1, 1)$ est un minimum global, $f(1, 1) = 1^2 + 1^2 = 2.$
- $(2, 2)$ est un maximum global, $f(2, 2) = 2^2 + 2^2 = 8$
- $\inf_{\Omega} f = \min_{\Omega} f = 2$ et $\sup_{\Omega} f = \max_{\Omega} f = 8$ exo Faire le lien avec Théorème 3.
- Pas d'extrema locaux : intuitivement, comme le champ est partout en pente, en tournant autour d'un point intérieur au champ, on sera toujours à un moment au-dessus et à un autre en-dessous de l'altitude de ce point.



Condition nécessaire d'extrémalité

Théorème 11 (Condition nécessaire d'ordre 1 pour être un extremum)

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable ayant un extremum local en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$.

$$\text{Alors } \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases}$$

Les points où le gradient s'annule sont les points critiques de f .

Preuve : Supposons que (\bar{x}, \bar{y}) soit un minimum local.²² Cela signifie $\exists r > 0$ tel que $B((\bar{x}, \bar{y}), r) \subset \Omega$ et $\forall (x, y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), r)$, $f(x, y) \geq f(\bar{x}, \bar{y})$. De façon équivalente : si $\|(h, k)\| < r$, alors $f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) \geq f(\bar{x}, \bar{y})$.

En utilisant la différentiabilité de f , il suit

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})h + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \geq f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})h + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \geq 0$$

Si on prend $k = 0$ et $h > 0$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \geq \frac{o(|h|)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$.

Si on prend $k = 0$ et $h < 0$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \leq \frac{o(|h|)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0$.

Finalement on a prouvé $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. On montre $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ de la même manière en considérant $h = 0$ et successivement $k > 0$ et $k < 0$ (exo). □

22. le cas d'un maximum local se traite de la même façon : (exo).

Remarques sur la condition nécessaire d'extrémalité

- Si un point est un extremum alors c'est un point critique mais \triangle réciproque fausse.
exo Prouver que $(0, 0)$ est un point critique de $f(x, y) = x^3$ mais que ce n'est ni un minimum ni un maximum local.
- Le résultat n'est vrai que pour les extrema locaux. Dans l'exemple page 39 avec $\Omega = [1, 2] \times [1, 2]$, $(1, 1)$ est minimum global et $(2, 2)$ maximum global mais $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla f(2, 2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Pour l'existence d'extrema globaux, cf. Thm 3 (continuité sur un compact) et

Théorème 12 (Existence minimum global pour les fonctions coercives)

Si f est continue sur \mathbb{R}^2 et coercive ($f(x, y) \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} +\infty$) alors f a un min. global sur \mathbb{R}^2 .

- En pratique, pour trouver les extrema :
 - 1 On calcule le gradient et on cherche les points critiques en résolvant l'équation $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ (concrètement c'est un système non-linéaire de 2 équations à 2 inconnues).
 - 2 On cherche les extrema locaux parmi les points critiques (on utilisera en particulier les conditions suffisantes Théorème 13 ci-après).
 - 3 S'il y a un bord, on étudie ensuite f au bord.
 - 4 On fait une synthèse des résultats trouvés.

Conditions suffisantes d'extrémalité

On rappelle la formule de Taylor de la page 35 quand f est C^2 :

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(h^2 + k^2)$$

Théorème 13 (Condition suffisantes d'ordre 2 pour être un extremum)

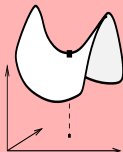
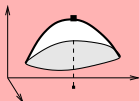
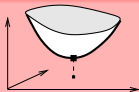
Supposons que f soit C^2 et que $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \vec{0}$.

① $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2}_{\det(\nabla^2 f)} > 0$ et $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0}_{\text{trace}(\nabla^2 f) > 0} \Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ minimum local

② $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2}_{\det(\nabla^2 f)} > 0$ et $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0}_{\text{trace}(\nabla^2 f) < 0} \Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ maximum local

③ $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2}_{\det(\nabla^2 f)} < 0 \Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ non extremum local, point selle

④ $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2}_{\det(\nabla^2 f)} = 0 \Leftrightarrow$ Cas douteux (\Leftrightarrow étude plus approfondie)



Remarques sur les conditions suffisantes

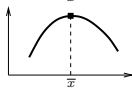
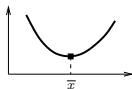
- (\bar{x}, \bar{y}) est un extremum local si $f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) - f(\bar{x}, \bar{y})$ reste positif ou négatif pour tous h, k petits. Si $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ alors le signe de $f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) - f(\bar{x}, \bar{y})$ est le même que le signe de la **partie quadratique** si celle-ci prédomine sur le **reste**. C'est ce qui se passe dans les cas ❶, ❷, ❸ où les résultats proviennent d'une étude de cette **partie quadratique** qui dépend des coefficients²³ de la matrice hessienne $\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})$. Dans le cas ❹, la **partie quadratique** est du même ordre que le **reste** et on ne peut pas conclure.

- C'est une généralisation des conditions suffisantes dans le cas des fonctions $f(x)$ d'une variable :

si $f'(\bar{x}) = 0$ et $f''(\bar{x}) > 0$: minimum local

si $f'(\bar{x}) = 0$ et $f''(\bar{x}) < 0$: maximum local

si $f'(\bar{x}) = 0$ et $f''(\bar{x}) = 0$: cas douteux.



exo Étudier les extrema de $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3x + 3y$ et $f(x, y) = x^2 - y^2$.

exo Repérer maxima, minima locaux et points selles sur les lignes de niveaux pages 3, 15 et 26.

exo Interprétation graphique de $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \vec{0}$ sur les 3 dessins page 42 ?

23. Pour simplifier, on n'a pas écrit (\bar{x}, \bar{y}) après les dérivées partielles dans le théorème.

Exercice : Trouver les extrema de $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + 15$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.

La fonction f est polynomiale donc dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Extrema globaux. $f(n, 0) = -\frac{n^3}{3} + 15 \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \mp\infty$ donc $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ et $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$

\Rightarrow f n'a pas d'extrema globaux sur \mathbb{R}^2 .

Extrema locaux. On écrit la condition nécessaire d'extrémalité :

$$\nabla f(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 4y^2 + y = y(4y + 1) = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow les points critiques de f sont $(0, 0)$ et $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.

On détermine lesquels sont extrema locaux :

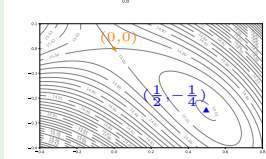
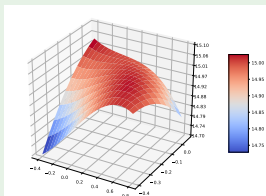
$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

► $\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\det(\nabla^2 f(0, 0)) = -1 < 0$

\Rightarrow $(0, 0)$ point selle.

► $\nabla^2 f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\det(\nabla^2 f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})) = 1 > 0$
et $\text{trace}(\nabla^2 f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})) = -3 < 0$

\Rightarrow $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ maximum local.



Exercice : Trouver les extrema de $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Avec le Théorème 7, on montre facilement que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. On remarque que $f \geq 0$. Comme $f(0, 0) = 0$, on obtient immédiatement que $(0, 0)$ est un minimum global (et aussi local).

D'autre part, voit que $f(x, y) \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} 0$ donc on peut montrer que

f admet un maximum global sur \mathbb{R}^2 (**exo***), qui sera aussi un maximum local.

Écrivons la condition nécessaire d'extrémalité.

$$\nabla f(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (-4x^3 - 6xy^2 + 4x)e^{-x^2-y^2} = -2x(2x^2 + 3y^2 - 2)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (-6y^3 - 4x^2y + 6y)e^{-x^2-y^2} = -2y(2x^2 + 3y^2 - 3)e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$ alors $-2y(3y^2 - 3) = 0$ d'où $y = 0$ ou ± 1 . Donc $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont points critiques. Si $x \neq 0$ alors $2x^2 + 3y^2 - 2 = 0$. De la 2ème égalité, on tire que $2x^2 + 3y^2 - 3 = -1$ donc $y = 0$. Cela entraîne $2x^2 - 2 = 0$ donc $x = \pm 1$. Donc $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ sont points critiques.

Finalement on a trouvé 5 points critiques : $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

On cherche la nature des points critiques à l'aide du Théorème 13. Pour cela, on calcule la matrice hessienne (calculs pénibles mais élémentaires) :

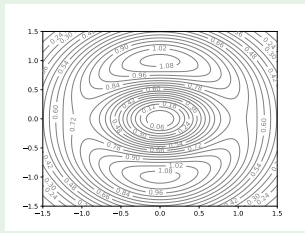
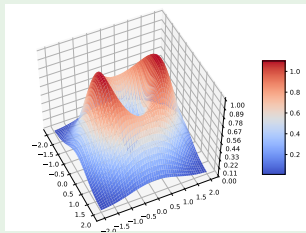
$$\nabla^2 f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 4 - 20x^2 - 6y^2 + 12x^2y^2 + 8x^4 & -20xy + 8x^3y + 12xy^3 \\ -20xy + 8x^3y + 12xy^3 & 6 - 4x^2 - 30y^2 + 12y^4 + 8x^2y^2 \end{pmatrix}$$

Exercice : Trouver les extrema de $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$. (suite)

- ▶ $\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\det(\nabla^2 f(0,0)) > 0$ et $\text{trace}(\nabla^2 f(0,0)) > 0 \Leftrightarrow \underline{(0,0) \text{ minimum local.}}$
- ▶ $\nabla^2 f(0,1) = e^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$, $\det(\nabla^2 f(0,1)) > 0$ et $\text{trace}(\nabla^2 f(0,1)) < 0 \Leftrightarrow \underline{(0,1) \text{ maximum local.}}$
- ▶ $\nabla^2 f(0,-1) = e^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$, $\det(\nabla^2 f(0,-1)) > 0$ et $\text{trace}(\nabla^2 f(0,-1)) < 0 \Leftrightarrow \underline{(0,-1) \text{ maximum local.}}$
- ▶ $\nabla^2 f(1,0) = e^{-1} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(\nabla^2 f(1,0)) < 0 \Leftrightarrow \underline{(1,0) \text{ point selle.}}$
- ▶ $\nabla^2 f(-1,0) = e^{-1} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(\nabla^2 f(-1,0)) < 0 \Leftrightarrow \underline{(-1,0) \text{ point selle.}}$

Conclusion : $(0,0)$ minimum global (et local).

Comme $f(0,1) = f(0,-1) = 3e^{-1}$ et qu'on sait qu'il existe un maximum global, les deux maxima locaux $(0,1)$ et $(0,-1)$ sont aussi maxima globaux.



8. Introduction à l'optimisation sous contrainte

Résoudre (P) : $\inf\{f(x, y) \text{ sous la contrainte } g(x, y) = 0\}$

Théorème 14 (Théorème des multiplicateurs de Lagrange)

Supposons

- 1 (\bar{x}, \bar{y}) est une solution de (P) (en particulier $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$)
- 2 $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (régularité)
- 3 $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}) \neq \vec{0}$ (non dégénérescence)

Alors il existe un multiplicateur de Lagrange $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f + \bar{\lambda}g)(\bar{x}, \bar{y}) = \vec{0}$.

Remarques sur le thm des multiplicateurs de Lagrange²⁴

- Dans (P), la condition $g(x, y) = 0$ traduit le fait qu'on cherche des solutions (\bar{x}, \bar{y}) satisfaisant la contrainte $(\bar{x}, \bar{y}) \in C := \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$.

Exemple : minimiser un coût en respectant un cahier des charges.

24. Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) mathématicien italien, père du calcul des variations.

Remarques sur le thm des multipl. de Lagrange (suite)

- Ce résultat est une condition nécessaire, il permet de déterminer les candidats solutions; c'est l'équivalent du Théorème 11 du §7 (cas des « extremas libres » sans contraintes). Nous ne donnerons pas ici de conditions suffisantes (comme le Théorème 13).
- Pour les résultats d'existence, on renvoie au Théorème 3.
- Utilisation pratique du théorème

① On introduit le **Lagrangien** du problème (P) $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

② On vérifie que f, g sont C^1 .

③ On cherche les solutions $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})$ du système d'optimalité :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 & \Leftrightarrow & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 & \text{traduit } \nabla(f + \bar{\lambda}g)(x, y) = \vec{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 & \Leftrightarrow & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 & \Leftrightarrow & g(x, y) = 0 & \text{traduit la contrainte} \end{cases}$$

Il s'agit de résoudre un système non-linéaire de 3 équations à 3 inconnues.

- ④ On détermine quels (\bar{x}, \bar{y}) sont solutions de (P)²⁵ et on vérifie que $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$.
- Si on trouve une solution avec $\bar{\lambda} = 0$, cela signifie que la « contrainte est inactive », c'est-à-dire que cette solution de (P) est également point critique du problème d'extrema libre $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.

25. ⚠ Les solutions du systèmes peuvent être des minima, maxima ou des points selles.

Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau

Soit $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq T$ une courbe paramétrée dérivable représentant le chemin d'un randonneur au cours du temps et f la fonction altitude différentiable.

$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ est le vecteur vitesse du randonneur,

tangent au chemin au point $(x(t), y(t))$.

$\|\vec{V}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ norme de la vitesse

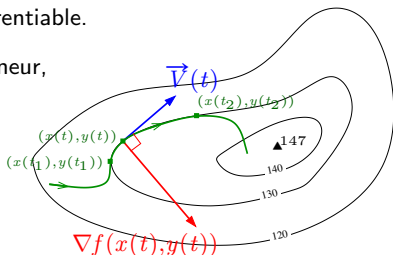
Si $(x(t), y(t))$ reste à une altitude constante h pour $t \in [t_1, t_2]$, le randonneur suit la ligne de niveau h avec une vitesse $\vec{V}(t)$ tangente à celle-ci. On a :

$$\forall t \in [t_1, t_2], f(x(t), y(t)) = h$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) = 0 \text{ par Théorème 8 } \blacksquare$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \vec{V}(t) = 0,$$

ce qui signifie exactement que le gradient de f est orthogonal aux tangentes aux lignes de niveau.



Le gradient indique la direction de plus grande pente

Imaginons un randonneur perdu dans le brouillard sans GPS qui veut regagner un refuge au fond de la vallée. La seule stratégie qui s'offre à lui est de profiter des informations au point où il se trouve et d'aller dans la direction « qui descend le plus » en espérant que cela le mènera en bas. **Quelle est cette direction ?**

Si le randonneur se trouve au point (\bar{x}, \bar{y}) , pour descendre le plus, il va essayer de trouver le vecteur (h, k) (de longueur petite ε car il ne voit pas loin dans le brouillard) qui minimise la quantité $f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y})$.

Si f est différentiable, $f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) \approx \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ (+ petit reste $o(\varepsilon)$).

On arrive au problème : $\inf \left\{ \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \text{ sous la contrainte } h^2 + k^2 = \varepsilon^2 \right\}$

qui se résout avec le Théorème 14 (**exo**). On trouve $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = -\varepsilon \frac{\nabla f(\bar{x}, \bar{y})}{\|\nabla f(\bar{x}, \bar{y})\|}$, c'est-à-dire une direction parallèle à $\nabla f(\bar{x}, \bar{y})$ pointant dans la direction opposée pour descendre²⁶ : **le gradient indique donc la direction de plus grande pente.**

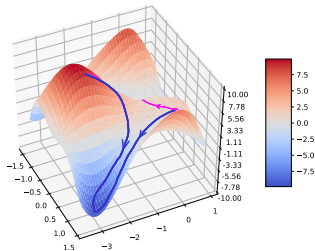
26. Trouver la direction « qui monte le plus » conduit au même problème avec une maximisation en place de la minimisation et la solution est $+\varepsilon \frac{\nabla f(\bar{x}, \bar{y})}{\|\nabla f(\bar{x}, \bar{y})\|}$.

Le gradient indique la direction de plus grande pente (suite)

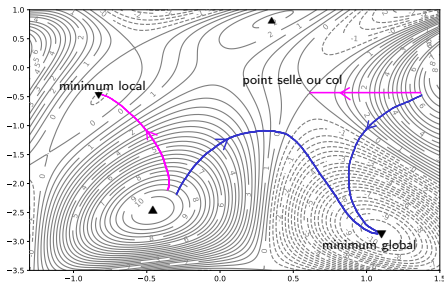
Cette propriété est utilisée pour **trouver numériquement le minimum d'une fonction** : on démarre d'un point et on descend en suivant le gradient en chaque point le long de la trajectoire. Il s'agit de l'**algorithme du gradient** ²⁷.

Le randonneur arrivera-t-il en bas avec cette méthode ? (ou, de façon équivalente, l'algorithme du gradient permet-il de déterminer le minimum de la fonction ?)

La réponse est : cela dépend. Cela mènera pour sûr à un point critique de la fonction altitude f , qui ne pourra évidemment pas être un maximum puisqu'on descend. Mais on peut parfois arriver à un minimum local (une cuvette dans laquelle le randonneur sera piégé) ou un point selle (un col).



$$f(x, y) = 10 \sin\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + 3\right) \cos(2x + 1 - e^y)$$



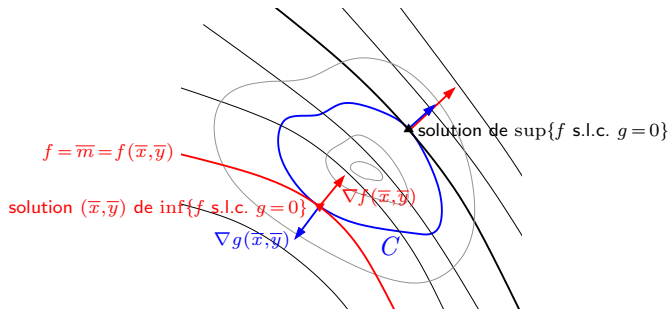
27. que vous verrez sans doute dans la suite de vos études.

Illustration graphique du théorème des multiplicateurs de Lagrange²⁹

Le Théorème 14 dit qu'en une solution (\bar{x}, \bar{y}) du problème de minimisation sous contrainte $\bar{m} = \inf \{f(x, y) \text{ sous la contrainte } g(x, y) = 0\}$, on a

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\lambda} \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \parallel \nabla g(\bar{x}, \bar{y})}$$

Comme le gradient est orthogonal aux lignes de niveau, on obtient que, au point optimal²⁸ (\bar{x}, \bar{y}) , la ligne de niveau $f = \bar{m} = f(\bar{x}, \bar{y})$ est **tangente** à $C = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ ligne de niveau 0 de la contrainte g .



28. \triangle sur le dessin, la solution est unique, ce n'est pas toujours le cas, cf. page 60.

29. qui porte aussi le nom de théorème des extrema liés qui est peut-être plus parlant.

Exercice : Trouver les extrema de $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x + 4y - 1$ d'abord dans \mathbb{R}^2 (extrema libres) puis sous la contrainte $g(x, y) := x + y - 1 = 0$.

f est polynomiale donc $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Dans \mathbb{R}^2 . On peut écrire $f(x, y) = (x - y + 1)^2 + 2(y + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{2}$. L'intérêt de cette écriture est de voir que $f(x, y) \geq f(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{13}{2}$ donc $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ est un minimum global. On déduit aussi de la factorisation que f est coercive^a (exo) et donc f n'est pas bornée par au-dessus, $\sup f = +\infty$.

On écrit la condition nécessaire d'extrémalité :

$$\nabla f(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 6y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ -x + 3y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

On a donc un seul point critique $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$. Comme on sait qu'il existe au moins un minimum global dans \mathbb{R}^2 , qui est aussi local, forcément le point $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ est le minimum global,^b avec $f(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{13}{2}$, et il n'y a pas d'autres extrema locaux.

Cette fonction est un paraboloïde (comme dans l'exemple page 39) et fait partie d'une classe de fonctions très importante en optimisation, les **fonctions convexes** dont nous ne parlerons pas dans ce cours par manque de temps.

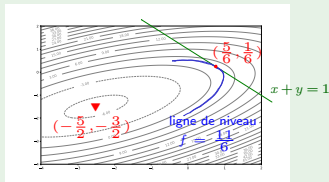
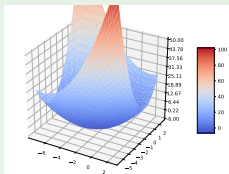
- Par le Théorème 12, on retrouve le fait que f admet un minimum global.
- Ici, il n'y a pas besoin de regarder les conditions suffisantes.

Exercice : Trouver les extrema de $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x + 4y - 1$ dans \mathbb{R}^2 puis sous la contrainte $g(x, y) := x + y - 1 = 0$. (Suite)

Sous la contrainte $g(x, y) = x + y - 1 = 0$. On introduit le Lagrangien du problème $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x + 4y - 1 + \lambda(x + y - 1)$ et on écrit le système d'optimalité

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - 2y + \lambda + 2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = -2x + 6y + \lambda + 4 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ y = \frac{1}{6} \\ \lambda = -\frac{10}{3} \end{cases} \quad a$$

On a une unique solution qui correspond à un minimum local qui est global. ^b Dans ce cas précis, qui est un cas simple donné pour vous entraîner, il y avait une solution élémentaire, ne nécessitant pas les multiplicateurs de Lagrange : de la contrainte, on tire $y = 1 - x$, on remplace y par cette valeur dans f et il ne reste plus qu'à minimiser la fonction $x \mapsto f(x, 1 - x)$ d'1 seule variable sur \mathbb{R} .



a. Heureusement ici le système était linéaire, donc facile à résoudre.

b. Ce n'est pas immédiat : il faut voir que l'ensemble des contraintes est une droite sur laquelle f est coercive, donc il existe un minimum global qui est forcément l'unique point critique. De plus $\nabla g = (1, 1) \neq \vec{0}$.

Exercice : Distance dans le plan du point $(1,2)$ à la droite d'équation $2x+3y=1$.

On propose 2 solutions : l'une utilisant l'optimisation sous contrainte et l'autre des considérations géométriques élémentaires.

1. Avec l'optimisation sous contrainte. Un point $M(x, y)$ est sur la droite s'il satisfait la contrainte $2x + 3y = 1$. La distance du point $M(x, y)$ au point $A(1, 2)$ est $MA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$. On remarque que minimiser la distance MA ou $MA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$ revient au même.^a

Le problème est donc : $\inf\{(x-1)^2 + (y-2)^2 \text{ sous la contrainte } 2x + 3y - 1 = 0\}$

On introduit le Lagrangien du problème $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(2x + 3y - 1)$

et on écrit le système d'optimalité
$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2(x-1) + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2(y-2) + 3\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

Le système est linéaire \Leftrightarrow unique solution $(x, y, \lambda) = \left(-\frac{1}{13}, \frac{5}{13}, \frac{14}{13}\right)$.

Comme on sait que le problème a une solution, c'est la solution.

a. on préfère travailler avec cette dernière fonction qui est plus simple car sans racine.

Exercice : Distance du point $(1, 2)$ à la droite d'équation $2x + 3y = 1$. (Suite)

2. Géométriquement.

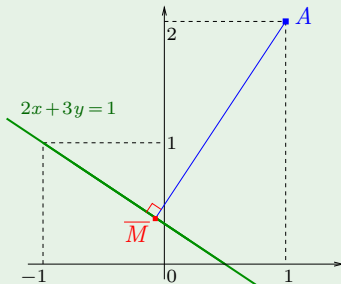
On voit que la distance est réalisée par $A\overline{M}$ pour un point $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y})$ qui est la projection de $A(1, 2)$ sur la droite $2x + 3y = 1$ qui admet $\vec{v}(3, -2)$ comme vecteur directeur.

On doit donc avoir :

$$\begin{cases} \overline{M} \in \text{droite} \Leftrightarrow 2\overline{x} + 3\overline{y} = 1 \\ \overrightarrow{AM} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3(\overline{x} - 1) - 2(\overline{y} - 2) = 0 \end{cases}$$

On obtient le système linéaire

$$\begin{cases} 2\overline{x} + 3\overline{y} = 1 \\ 3\overline{x} - 2\overline{y} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \overline{x} = -\frac{1}{13} \\ \overline{y} = \frac{5}{13} \end{cases}}$$



Remarques :

- ▶ Ici la 2ème méthode est plus simple car on a une interprétation géométrique mais la méthode d'optimisation sous contrainte est plus systématique.
- ▶ Il ne faut pas trop faire confiance au dessin. On avait envie de dire que \overline{M} était à l'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées ce qui se révèle faux après calculs.

Exercice : En utilisant une quantité α d'aluminium, concevoir la boîte de conserve (un cylindre) ayant un volume V maximal, sachant que le fond et le dessus doivent avoir double épaisseur.

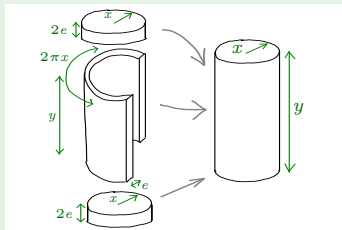
Modélisation : x rayon de la boîte, y hauteur et e épaisseur de la paroi latérale.

volume : $V(x, y) = \pi x^2 y$

quantité d'aluminium nécessaire :

$$\underbrace{\pi x^2 \times 2e}_{\text{couvercle}} + \underbrace{2\pi xy \times e}_{\text{paroi}} + \underbrace{\pi x^2 \times 2e}_{\text{fond}} = \alpha$$

Soit $g(x, y) = 2x^2 + xy - \frac{\alpha}{2\pi e}$



Problème : $\sup\{V(x, y) \text{ sous la contrainte } g(x, y) = 0\}$

On suppose qu'il existe une solution au problème.

On introduit le Lagrangien du problème $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = V(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Système d'optimalité :

$$\begin{cases} \textcircled{1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2\pi xy + \lambda(4x + y) = 0 \\ \textcircled{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = \pi x^2 + \lambda x = x(\pi x + \lambda) = 0 \\ \textcircled{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 2x^2 + xy - \frac{\alpha}{2\pi e} = 0 \text{ (contrainte)} \end{cases}$$

Exercice : boîte de conserve optimale (Suite)

Le système qu'on obtient n'est pas linéaire donc difficile à résoudre en général.

Résolution du système. x ne peut pas être nul car

$g(0, y) = -\frac{\alpha}{2\pi e} \neq 0$ et la contrainte ne serait pas satisfaite. Il suit alors de ② que $\lambda = -\pi x$.

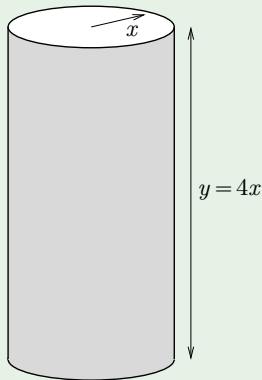
En remplaçant λ dans ① et en joignant ③,

on obtient un système linéaire par rapport à xy et x^2 ,

$$\begin{cases} \pi xy - 4\pi x^2 = 0 \\ xy + 2x^2 = \frac{\alpha}{2\pi e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{\alpha}{3\pi e} \\ x^2 = \frac{\alpha}{12\pi e} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{3\pi e}} \\ y = 2\sqrt{\frac{\alpha}{3\pi e}} \end{cases}}^a$$

(et de plus $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$).

Comme on a une unique solution au système et qu'on sait qu'il y a une solution, on sait qu'on tient la solution.



Remarque : Il y avait une manière plus élémentaire (quoique non systématique) de procéder. On a vu que le x optimal ne pouvait pas être nul donc on tire de la contrainte $y = -2x + \frac{\alpha}{2\pi e} \frac{1}{x}$. En injectant dans le volume, on obtient une fonction d'1 seule variable, $V = -2\pi x^3 + \frac{\alpha}{2\pi e} x$ qu'il suffit de maximiser par rapport à x .

a. Le point important est $y = 4x$ qui donne les proportions de la boîte de conserve.

Exercice : Étudier les extrema de $f(x, y) = xy$ sur \mathbb{R}^2 puis sous la contrainte $4x^2 + y^2 = 4$.

On remarque d'emblée que f et la contrainte $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4$ sont dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Extrema libres sur \mathbb{R}^2 . $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a : $f(n, n) = n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Leftrightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ et

$f(n, -n) = -n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \Leftrightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$. Pas d'extrema globaux sur \mathbb{R}^2 .

On écrit la condition nécessaire pour trouver les extrema locaux :

$$\nabla f(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0, 0) \text{ seul point critique.}$$

Conditions suffisantes : $\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(\nabla^2 f(0,0)) = -1 < 0 \Leftrightarrow (0, 0)$ point selle.

Pas d'extrema locaux sur \mathbb{R}^2 non plus.

Minimisation sous contraintes : $\inf\{xy \text{ sous la contrainte } g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0\}$

On remarque que $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0\}$ est une ellipse.^a

C est compact et f est continue \Leftrightarrow par le Théorème 3, on sait que f est bornée et atteint ses bornes sur C donc le problème admet au moins 1 minimum et 1 maximum global.

On introduit le Lagrangien du problème $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$.

$$\text{Système d'optimalité : } \begin{cases} \textcircled{1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = y + 8\lambda x = 0 \\ \textcircled{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = x + 2\lambda y = 0 \\ \textcircled{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ (contrainte)} \end{cases}$$

a. À connaître.

Exercice : Extrema de $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $4x^2 + y^2 = 4$ (suite).

On remarque que x et y sont tous deux non nuls. En effet, si l'un des deux est nul, l'autre est aussi nul d'après ❶ ou ❷ et cela mène à une contradiction avec ❸. Il suit de ❶-❷ : $\lambda = -\frac{y}{8x} = -\frac{x}{2y} \Leftrightarrow 4x^2 = y^2$. Puis, par ❸, on obtient $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y = \pm \sqrt{2}$.

Finalement 4 solutions du système : $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$.

On sait qu'il existe au moins 1 minimum et 1 maximum qui doivent se trouver parmi ces 4 points. Comme $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}) = 1$ et $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}) = -1$,

$\Leftrightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ minima et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$ maxima

Méthode alternative. On sait paramétrer l'ellipse : $C = \{(\cos(\theta), 2 \sin(\theta)) : \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Il suffit que pour résoudre le problème, il suffit de trouver les extrema de la fonction d'une variable $h(\theta) = f(\cos(\theta), 2 \sin(\theta)) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$ (exo).

