Analyse 3 – STPI – 2ème année

Chapitre 1 : Intégrales généralisées

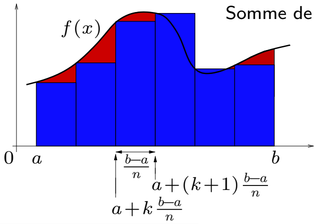
Olivier Ley
IRMAR, INSA de Rennes

1.1. Rappel sur l'intégrale classique (de Riemann[5])

Si f est $\boxed{\text{continue sur } [a,b]}$[1],

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\substack{\text{Thm fondamental}\\ \text{de l'analyse}^{2}}}{=} F(b)-F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive}^{3} \text{ de } f \text{ sur } [a,b]$$

$$\underset{\text{Définition}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)}_{\text{Somme de Riemann}^{4}}$$



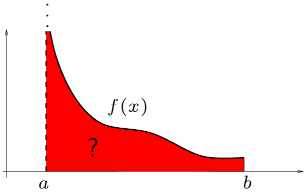
1. On peut définir l'intégrale de Riemann pour des fonctions plus générales, par exemple continues par morceaux, cf. cours de 1A.
2. Théorème attribué historiquement à Isaac Newton (1642–1727).
3. définie à une constante près : $\forall x \in [a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy + C$, $F \in C^1([a,b])$ et $F' = f$.
4. Ici on utilise les rectangles à gauche et un pas constant mais d'autres choix sont possibles.
5. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), mathématicien allemand.

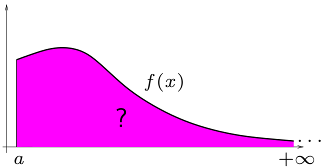
1.2. Nouvelles questions :

Que se passe-t-il si f est seulement continue sur $\underline{\underline{]}}a, b]$ ou $[a, +\infty\underline{\underline{[}}$?

Peut-on donner un sens à

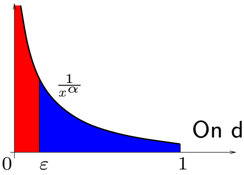
$$« \int_a^b f(x)\,dx » \qquad \text{ou} \qquad « \int_a^{+\infty} f(x)\,dx » \quad ?$$





1.3. Exemple fondamental : Intégrales de Riemann

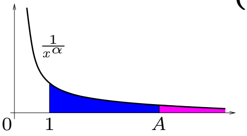
- $\forall 0<\varepsilon<1,\ \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha>1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha<1 \end{cases} \\ [\ln x]_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon & \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{si } \alpha=1 \end{cases}$



donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ existe} \iff \alpha<1}$

On dira que $\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge si } \alpha<1 \text{ et } \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ diverge si } \alpha\geq 1 \end{cases}$

- $\forall A>1,\ \displaystyle\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_1^A = \frac{A^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha<1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha>1 \end{cases} \\ [\ln x]_1^A = \ln A & \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{si } \alpha=1 \end{cases}$



donc $\boxed{\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} \text{ existe} \iff \alpha>1}$

On dira que $\begin{cases} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge si } \alpha>1 \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ diverge si } \alpha\leq 1 \end{cases}$

2. Définitions et premières propriétés

Définition 1

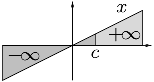
1. *Soit f continue sur $[a, b[$, $-\infty < a < b \le +\infty$ (problème éventuel à droite en b qui peut être $+\infty$).* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *converge* $\Longleftrightarrow \displaystyle\lim_{X \to b^-} \int_a^X f(x)dx$ *existe et finie.*
2. *Soit f continue sur $]a, b]$, $-\infty \le a < b < +\infty$(problème éventuel à gauche en a qui peut être $-\infty$).* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *converge* $\Longleftrightarrow \displaystyle\lim_{X \to a^+} \int_X^b f(x)dx$ *existe et finie.*
3. *Soit f continue sur $]a, b[$, $-\infty \le a < b \le +\infty$ (il peut y avoir deux problèmes de convergence en a et en b). Alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *converge*

   $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^c f(x)dx$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ *convergent toutes deux pour un c dans $]a, b[$.*

Remarque : La définition ❸ dit qu'il faut étudier les problèmes de convergence en chaque point qui pose problème **séparément**. Par exemple :

$\forall X > 0$, $\int_{-X}^X xdx = [\frac{x^2}{2}]_{-X}^X = 0$ donc $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^X xdx = 0$.

Pourtant $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$ diverge car $\int_{-\infty}^{c} xdx$ et $\int_{c}^{+\infty} xdx$ divergent $\forall c \in \mathbb{R}$.



L'objectif de cours est d'étudier ce nouveau type d'intégrales qui sont appelées **intégrales généralisées** : convergent-elles ? Si oui, peut-on calculer leur valeur ?

Définition 2

Si f est continue sur $]a, b[$ et que $\int_a^b |f(x)|dx$ converge, on dit que $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente.

Remarque :

- On verra que « absolument convergent » $\Rightarrow$ « convergent »
- « absolument convergent » sera appelé **intégrable** en 3A où une notion plus moderne et plus puissante d'intégrale sera définie : l'intégrale de Lebesgue. [6] Une intégrale généralisée convergente mais non absolument convergente sera alors appelée « semi-convergente ».

6. Henri Lebesgue (1875–1941), mathématicien français, a révolutionné et généralisé le calcul intégral. Il a enseigné quelques années à Rennes où un centre de recherche en mathématiques porte son nom.

Exemples

1. $f(x)=e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$. $\forall A>0$, $\int_0^A e^{-x}\,dx = 1-e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\to} 1$

   donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \text{ converge et vaut } 1}$ (absolument cv car $|f(x)|=f(x)$).

2. $f(x)=\ln x$ est continue sur $]0,1]$.
   $\forall 0<\varepsilon<1$, $\int_\varepsilon^1 \ln x dx = [x\ln x - x]_\varepsilon^1 = -1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\to} -1$

   donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln x dx \text{ converge et vaut } -1}$. L'intégrale est absolument convergente car $\int_0^1 |\ln x| dx = -\int_0^1 \ln x dx = 1$.

3. D'après l'étude des intégrales de référence de Riemann (cf. page 5),
   $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ (convergente), $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ diverge, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ diverge,
   $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ diverge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ (convergente).

4. exo Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dr}{r\ln r}$.

5. exo Si $f\geq 0$ et $\int_1^A f$ est borné indépendamment de $A>1$, alors $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Critère de Cauchy [8]

Théorème 1 (Critère de Cauchy pour une fonction)

Soit F continue sur $[a,b[$ (b peut être égal à $+\infty$). Alors :
$$\lim_{x\to b^-} F(x) \text{ existe } \iff \forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0 : \forall x,y\in[b-\alpha,b[,\ |F(x)-F(y)|<\varepsilon.$$

Ce critère permet de prouver l'existence d'une limite sans connaître sa valeur. [7]

Théorème 2 (Conséquence pour la cv des intégrales généralisées)

1. *Soit f continue sur $[a,b[$, $b<+\infty$ (l'intervalle $[a,b[$ est de longueur finie).*
$$\int_a^b f(x)dx \text{ converge} \iff \forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0 : \forall x,y\in[b-\alpha,b[, \left|\int_x^y f(z)dz\right|<\varepsilon.$$
2. *Soit f continue sur $]a,b[$ de longueur finie et f bornée. Alors $\int_a^b f\,dx$ converge.*
3. *Si $\int_a^b |f|dx$ converge (cv absolue) alors $\int_a^b f\,dx$ converge.*

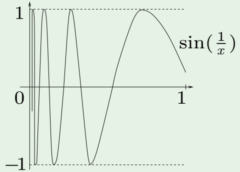
7. À comparer avec les suites de Cauchy qu'on verra dans le chapitre 2 sur les séries numériques.
8. Augustin Louis Cauchy (1789–1857), mathématicien français.

Exercices

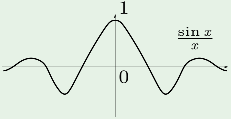
1. **Preuve de ❶ Théorème 2 :** exo appliquer le théorème 1 à $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$.

2. **Preuve de ❷ Théorème 2 :** Il suffit de prouver que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent pour $c \in]a,b[$. On montre la convergence de $\int_c^b f$, l'autre se traite similairement. Comme f est bornée par une constante M, on a : $\forall x, y \in]a,b[$, $|\int_x^y f| \le M|x-y|$. D'autre part, comme $]a,b[$ est de longueur finie, a, b sont finis (différents de $\pm\infty$). Alors, $\forall \varepsilon > 0$, si $\alpha < \frac{\varepsilon}{M}$, on a $\forall c < b-\alpha < x, y < b$, $|\int_x^y f| \le M\alpha \le \varepsilon$, donc Théorème 2.❶ est vérifié et $\int_c^b f$ converge.

3. $\displaystyle\int_0^1 \sin(\tfrac{1}{x})dx$ **converge :** $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $]0,1]$ et est bornée (dessin à connaître) donc l'intégrale converge d'après Théorème 2.❷.



4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ **converge :** Le sinus cardinal $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est continu sur $]0,1]$. Pour obtenir la convergence de l'intégrale, il suffit de dire soit que f est bornée (car $|\sin x| \le |x|$ donc $|\frac{\sin x}{x}| \le 1$, $\forall x \ne 0$), soit que f est prolongeable par continuité en 0 (car $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).



3. Critères de convergence

Comment prouver en pratique qu'une intégrale généralisée converge ou diverge ?

3.1. En utilisant la définition

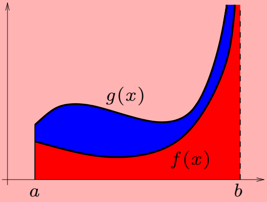
On essaie de calculer les intégrales classiques approchées de la Définition 1 quand c'est possible ou on utilise les premières propriétés, cf. §2.

3.2. Critère de comparaison

Théorème 3 (Majorations, minorations)

Soient f, g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$.

- *Si $0 \leq f \leq g$ sur $[a, b[$ et $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.*
- *Si $0 \leq f \leq g$ sur $[a, b[$ et $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.*



Remarques :

1. On essaie bien sûr de comparer avec des fonctions dont on connaît la nature de l'intégrale généralisée.[9]
2. ⚠Même nature $\neq$ même valeur.

9. comme les intégrales de Riemann, cf. page 5, dont on sait si elles convergent ou divergent.

Exercices

1. $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ sont continues sur $[1, +\infty[$.
   $\forall x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x} \text{ converge}}$.
   Mais $\int_1^{+\infty} g(x)dx = 1$ et $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \ln 2$
   car $\forall A > 1$, $\int_1^A \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^A (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dx = [\ln \frac{x}{x+1}]_1^A = \ln \frac{A}{A+1} - \ln \frac{1}{2} \underset{A \to +\infty}{\to} \ln 2$.
2. $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x} dx \text{ diverge}}$ car $\frac{1-e^{-x}}{x} \geq \frac{1-e^{-1}}{x}$ sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-1}}{x} dx$ diverge.
3. $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ converge}}$. En effet, par croissances comparées,
   $x^2 e^{-x^2} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$, donc il existe R assez grand tel que, pour $x \geq R$,
   $x^2 e^{-x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Comme $\int_R^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, on en déduit que $\int_R^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge puis que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_R^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge (car $\int_0^R e^{-x^2} dx$ est une intégrale classique).

3.3. Critère utilisant les équivalents

Définition 3 (Rappel de 1A sur les équivalents)

Soit f, g deux fonctions définies sur $[a, b[$ ($b \leq +\infty$) ne s'annulant pas.
On a : f est équivalent à g au voisinage de b, noté $f \underset{b^-}{\sim} g \iff \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Remarque : $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ ➪ $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ mais ⚠ $f_1 + f_2 \not\sim g_1 + g_2$ en général

exo $\frac{x^3+x+1}{x^4+e^{-x}+\sin x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Théorème 4 (Théorème des équivalents)

Soient f, g continues sur $[a, b[$, $f, g > 0$ (ou < 0) au voisinage de b^-.

Si $f \underset{b^-}{\sim} g$ alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.

⚠ Même nature $\neq$ même valeur.

Exercices

1. $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{e^t-1}{(\sin t)^{3/2}}\,dt \text{ converge}}$. En effet, $f(t) = \frac{e^t-1}{(\sin t)^{3/2}}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc on a un problème de convergence en 0. Mais $e^t = 1 + t + o(t)$ donc $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$. D'autre part, $\sin t = t + o(t^2)$ donc $(\sin t)^{3/2} \underset{0}{\sim} t^{3/2}$. D'où $\frac{e^t-1}{(\sin t)^{3/2}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. Comme les deux fonctions sont positives au voisinage de 0^+ et que $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge, on conclut que $\int_0^{\pi/2} f(t)dt$ converge.

2. exo $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1-\cos x}\,dx \text{ converge.}}$

3.4. Utilisation de l'intégration par parties

On fait l'intégration par parties sur des segments fermés où f est continue et on passe à la limite ensuite (dit autrement, on travaille avec des intégrales classiques).

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$

DV $\quad 0 \quad$ CV $\quad 1 \quad$ CV absolue $\quad \alpha$

$f(t) = \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc problème de convergence en $+\infty$.

- **Cas $\alpha > 0$.** $\forall A > 1$, par intégration par parties,

  $$\int_1^A \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt = \left[-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_1^A - \alpha \int_1^A \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt = -\frac{\cos A}{A^\alpha} + \frac{\cos 1}{1} - \alpha \int_1^A \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$$

  Or $\alpha > 0$, donc $\left| -\frac{\cos A}{A^\alpha}\right| \leq \frac{1}{A^\alpha} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$.

  D'autre part, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$ converge absolument car $\left|\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$ converge car $\alpha + 1 > 1$. On en conclut que $\int_1^{+\infty} f$ converge.

  $\boxed{\text{exo}}$ $\int_1^{+\infty} f$ converge absolument si $\alpha > 1$.

  $\boxed{\text{exo}\star}$ $\int_1^{+\infty} f$ non abs. cv pour $0 < \alpha \leq 1$ (utiliser le lien avec les séries, cf. p.18).

- **Cas $\alpha = 0$.** $\int_1^A \sin t\, dt = -\cos A + \cos 1$ qui n'a pas de limite quand $A \to +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} f$ diverge.

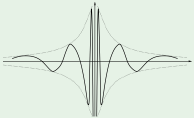
- **Cas $\alpha < 0$.** $\boxed{\text{exo}\star}$ $\int_1^{+\infty} f$ diverge (utiliser le critère de Cauchy, Théorème 2.❶).

3.5. Utilisation d'un changement de variable

La nature d'une intégrale généralisée est préservée par changement de variable : on peut donc faire des changements de variables sans justifier préalablement de la convergence ou divergence.

Exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})\,dt$ **converge.**

$f(t) = \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})$ est continue sur $]0,1]$: problème de cv en 0.



⚠ f n'est pas de signe constant au voisinage de 0.

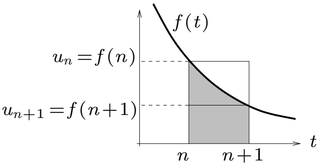
$$\int_0^1 \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})\,dt = \int_{+\infty}^1 u\sin u \frac{-du}{u^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{changement variable}\\ u=\frac{1}{t},\, dt=-\frac{du}{u^2}\end{array}}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge (cf. page 16, cas $\alpha = 1$).

Donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

3.6. Lien avec les séries numériques



Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $\underline{f \geq 0}$, $\underline{f \text{ décroissante}}$,

$u_n = f(n)$

Alors, pour $n \geq 1$, $\boxed{u_{n+1} = f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq u_n = f(n).}$

D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} u_n \leq u_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(t)dt,$

soit encore $\displaystyle\int_1^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} u_n \leq u_1 + \int_1^{N} f(t)dt.$

Théorème 5 (Comparaison séries-intégrales)

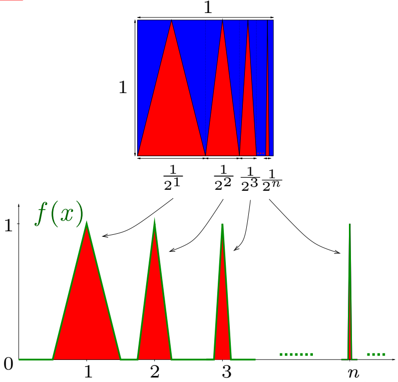
Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante.

Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(n)$ sont de même nature.

Ceci sera revu dans le chapitre 2 sur les séries numériques.

Un exemple où $f \underset{+\infty}{\not\to} 0$ et pourtant $\int_0^{+\infty} f$ converge

Lorsque $f \geq 0$ continue sur $[0, +\infty[$ tend vers 0 « assez vite » [10] quand $x \to +\infty$, alors on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge. [11] Mais ⚠ la **réciproque est fausse** :



$$\forall n \geq 1, \int_1^n f(x)dx$$
$$\leq \sum \text{aire des triangles}$$
$$\leq \text{aire du carré} = 1$$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge (cf. page 8 ❺).

Pourtant $f(x) \underset{x \to +\infty}{\not\to} 0$.

La preuve rigoureuse utilise le théorème 18 de comparaison séries-intégrales (qui sera vu au chapitre 2). Un exemple de fonction telle que l'intégrale généralisée converge alors que celle-ci n'est même pas bornée sur $[0, +\infty[$ est traité en TD.

10. c'est-à-dire plus vite que $\frac{1}{t^2}$, e^{-t}, etc.
11. par le théorème de comparaison, cf. page 12.

4. Récapitulatif pour l'étude d'une intégrale généralisée

1. Calcul en utilisant la définition : page 6
2. Théorème de comparaison pour les **fonctions positives** : page 12
3. Théorème des équivalents pour les **fonctions positives** : page 14
4. Intégration par parties (calculs sur les bornes approchées) : page 16
5. Changement de variables : page 17
6. Comparaison séries-intégrales si f est **positive**, continue, décroissante : page 18

Pour les fonctions qui ne sont pas positives (ou plus généralement pas de signe constant au voisinage du problème de convergence), on commencera toujours par étudier la convergence absolue de l'intégrale.

Les cas les plus difficiles concernent bien sûr les intégrales qui sont convergentes mais non absolument convergentes.