Analyse 3 – STPI – 2ème année

Chapitre 2 : Séries numériques

Olivier Ley
IRMAR, INSA de Rennes

Introduction

Série : somme d'une infinité de termes
Numérique : les termes sont des nombres réels ou complexes.

Utilité ?

➪ $$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (6n)!\,(13\,591\,409 + 545\,140\,134\,n)}{(3n)!(n!)^3\,640\,320^{3n+3/2}}$$

David et Gregory Chudnovsky [1] : 500 millions de décimales de π en 1989
Emma Haruka Iwao [2] : 100 000 milliards de décimales de π en 2022

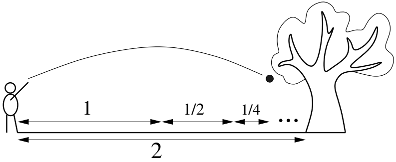
➪ Paradoxe de Zénon [3] ou de la dichotomie
Zénon se place à 2 m d'un arbre et lance une pierre en sa direction.
La pierre n'arrivera jamais à l'arbre car elle devra d'abord parcourir la moitié de la distance (1 m), puis la moitié de la distance restante (1/2 m) et ainsi de suite...
Il restera toujours une infinité de moitiés de distance à parcourir.
Paradoxe résolu par l'analyse moderne : *une somme infinie de nombres positifs peut converger vers un résultat fini* (exo Y réfléchir)

1. Mathématiciens ukrainiens nés en 1947 et 1952
2. Informaticienne japonaise chez Google, née en 1986
3. Zénon d'Élée, $Z\acute{\eta}\nu\omega\nu$, philosophe grec, 490–430 av. J.-C.

Introduction

Remarques :

• Cet exemple permet d'établir l'identité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$



• Délicat de sommer une infinité de choses : besoin de notions qui ont mis du temps à être établies proprement :

que vaut $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$?
si $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$
alors $S - 1 = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots = -(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots) = -S$
donc $S = \frac{1}{2}$ (exo Y réfléchir !)

• On se convainc facilement que si l'on veut qu'une somme de termes strictements positifs soit finie, ce qu'on rajoute au fur et à mesure doit être de plus en plus petit (tendre vers 0) car :
$\mathbb{R}$ est archimédien : $\forall \varepsilon > 0, \forall A > 0, \exists N \ : N\varepsilon \geq A$ (exo Comprendre la formule)

1. Définitions, premiers exemples et propriétés

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

- $\forall N \geq 0$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$ *est la somme partielle des $N+1$ premiers termes de (u_n).*
- $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *est elle-même une suite. Si (S_N) converge, on dit que la série $\sum u_n$ converge (sinon elle diverge).*
- *Quand la série $\sum u_n$ converge, on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite. C'est la somme de la série. On appelle alors $R_N := \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ le reste d'ordre N de $\sum u_n$; c'est également une série convergente (exo).*

Exemples exo :

$u_n = \frac{1}{2^n}$, $\sum u_n$ converge, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$

$u_n = 1$, $\sum u_n$ diverge

$u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, $\sum u_n$ converge, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$ (série télescopique)

Théorème 1

- *Lorsque* $\sum u_n$ *converge* $\boxed{\begin{cases} S_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_N + R_N, \\ \forall n \geq 1, \quad u_n = S_n - S_{n-1}. \end{cases}}$
- *Si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n + v_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Preuve : exo

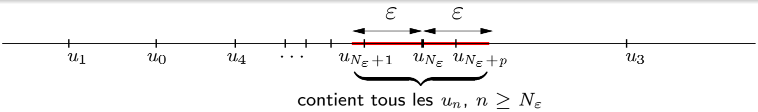
Objectif principal de ce cours

Déterminer la nature d'une série numérique : convergente ou divergente ?

Suites des Cauchy[4], espaces complets[5], critère de Cauchy

Définition 2 (Suite de Cauchy)

(u_n) *est une* ***suite de Cauchy*** *si*
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$



exo Comprendre la définition. Montrer qu'une suite de Cauchy est toujours bornée.

Théorème 2 ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces complets)

Les suites de Cauchy réelles ou complexes convergent.

Théorème 3 (Critère de Cauchy)

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \underbrace{(S_N) \text{ est une suite de Cauchy}}_{\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}| \leq \varepsilon}$$

4. Augustin Louis Cauchy (1789–1857), mathématicien français.
5. Un espace est complet lorsque toute suite de Cauchy de l'espace converge dans cet espace.

Conséquence : $\boxed{\text{La série harmonique } \sum \frac{1}{n} \text{ diverge}}$

$u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ (⚠ on commence à sommer à partir de $n = 1$ ici)

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq (2n - (n+1) + 1)\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

(car si $k \leq 2n$ alors $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$)

On peut alors conclure de 2 manières différentes :

- Par l'absurde : si $\sum \frac{1}{n}$ converge de somme S alors $S_n \to S$ et $S_{2n} \to S$ (comme suite extraite) donc $S_{2n} - S_n \to 0$ ce qui est contradictoire avec l'inégalité ci-dessus ;
- $|S_{2n} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n}| \geq \frac{1}{2}$ pour tous $n \geq 0$ donc le critère de Cauchy ne peut pas être vérifié (exo à comprendre)

Conclusion : $\sum u_n$ diverge

Théorème 4

Si $\sum u_n$ *converge alors* $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Preuve : exo (utiliser $u_n = S_n - S_{n-1}$)

⚠La réciproque est fausse : $\frac{1}{n} \to 0$ et pourtant $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Définition 3

- *si* $u_n \not\to 0$*, on dit que* $\sum u_n$ *diverge grossièrement*
- *si* $\sum |u_n|$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge*[a]*: on dit que* $\sum u_n$ *converge absolument*
- *si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum |u_n|$ *diverge, on dit que* $\sum u_n$ *est semi-convergente.*

a. Ceci est un résultat qui se démontre en utilisant le critère de Cauchy.

Remarques :

1. $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement
2. toute série convergente à termes positifs $(u_n \geq 0)$ est absolument convergente car $|u_n| = u_n$.
3. Séries semi-convergentes : cas les plus difficiles

2.1. Séries de référence : **Séries géométriques**

Suite géométrique $u_n = a^n$ de raison $a \in \mathbb{C}$

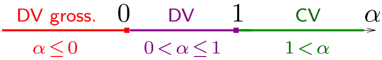
$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1, \\ n+1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

<u>1er cas</u> : si $|a| < 1$ alors $|a|^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc $\boxed{\sum_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a} \text{ si } |a| < 1}$

<u>2ème cas</u> : si $|a| \geq 1$ alors $|a|^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ donc $\boxed{\sum a^n \text{ diverge grossièrement si } |a| \geq 1}$

2.2. Séries de référence : **Séries de Riemann** [6]

$u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.



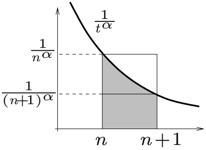
Si $\underline{\alpha \leq 0}$: $\frac{1}{n^\alpha} \not\to 0$ donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement

Si $\underline{\alpha > 0}$ alors $u_n \to 0$, on distingue les sous-cas : $\underline{\alpha = 1}$, $\underline{0 < \alpha \leq 1}$, $\underline{\alpha > 1}$

$\underline{\alpha = 1}$: série harmonique, $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\underline{0 < \alpha \leq 1}$: $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ donc $S_N \geq 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{N} \underset{N \to \infty}{\to} +\infty$ donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge

$\underline{\alpha > 1}$ $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} = u_n$



$S_N = u_1 + \cdots u_N \leq 1 + \displaystyle\int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$ car $\alpha > 1$.

Donc (S_N) est majorée et elle est croissante ($S_{N+1} - S_N = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq 0$) donc elle converge

Conclusion : $\boxed{\sum \dfrac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1}$

6. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), mathématicien allemand.

3. Séries à termes positifs ($u_n \geq 0$ pour tout n)

Remarques fondamentales :

- $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$ est croissante donc 2 cas possibles :

$$S_N \text{ est majorée} \Longleftrightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

$$S_N \to +\infty \Longleftrightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

- Pour simplifier, on suppose que tous les termes sont positifs. Mais tout se passe de la même manière si plus généralement tous les termes de la série sont de signe constant à partir d'un certain rang : $\boxed{\text{exo}}$ comprendre pourquoi.

Critère de comparaison

Théorème 5 (de comparaison)

Supposons que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs telles que, à partir d'un certain rang, $\underline{0 \leq u_n \leq v_n}$. Alors :

1. *si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge ;*
2. *si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Le but est de réussir à comparer les termes généraux d'une série compliquée avec ceux d'une série dont on connaît la nature, souvent une série de référence (géométrique ou de Riemann).

Exercices

1. exo $\boxed{\text{Étudier la convergence de } \sum u_n \text{ avec } u_n = \frac{1}{n^4+2-\cos n}, \frac{\ln n}{n}, \frac{1}{3^n+\sqrt{n}}}$

2. $\boxed{\text{Prouver que } \sum \frac{\ln n}{n^2} \text{ converge}}$

Pour $n \geq 1$, $0 \leq u_n = \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \frac{1}{n^{3/2}}$
Par croissance comparée, $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$ donc pour $n \geq A$ (assez grand), $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \leq 1$
d'où, pour $n \geq A$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^{3/2}}$.
Comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), par le théorème de comparaison, on conclut que $\sum u_n$ converge.

3. exo $\boxed{\text{Prouver que s'il existe } \alpha > 1 \text{ tel que } n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ alors } \sum u_n \text{ converge.}}$

Utiliser des idées similaires à celles de l'exercice précédent.

Critère des équivalents

Théorème 6 (des équivalents)

Supposons que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarques

- Rappel : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Revoir au besoin le cours de 1A.
- "De même nature" signifie toutes les deux, soit convergent, soit divergent.
- ⚠Le résultat du théorème peut être faux si les séries ne sont pas à termes positifs, cf. Exercice de TD.
- Ici aussi, on espère un équivalent simple, typiquement à une série de référence.

exo Reprendre l'exercice ❶ page 14 avec ce nouvel outil.
Étudier la convergence de $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{2^n+(-1)^n n^2}$, $u_n = \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ et $u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^\alpha})$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice corrigé : **constante γ d'Euler et série harmonique**

Question : $\sum \frac{1}{n}$ diverge mais à quelle vitesse ?

Posons, pour $n \geq 1$, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

Étude de (u_n) $\Leftrightarrow$ Étude de la série télescopique $\sum v_n$ avec $v_n = u_n - u_{n-1}$ exo

$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

donc $v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ (et les deux suites sont de signe constant négatif)

donc $\sum u_n - u_{n-1}$ et la série de Riemann $\sum -\frac{1}{2n^2}$ (avec $\alpha = 2 > 1$) sont de même nature. on conclut que $\sum v_n$ converge.

Mais $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} v_n = \sum_{n=2}^{N} u_n - u_{n-1} = u_N - u_1$ donc (u_N) converge.

On appelle γ sa limite [a] : $\displaystyle 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \underset{n\to\infty}{\to} \gamma$

On obtient le **développement asymptotique de la série harmonique** [b]

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

---

a. La constante $\gamma = 0,5772156649015328\cdots$ est appelée constante d'Euler du nom du mathématicien et physicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui en calcula les 16 premières décimales.

b. exo$\star$ Calculer la suite du développement : $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$

Critère de d'Alembert [7]

Théorème 7 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. *si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ *et* $\ell < 1$ *alors* $\sum u_n$ *converge.*
2. *si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ *et* $\ell > 1$ *alors* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*
3. *si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ *par valeurs supérieures alors* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*
4. *si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ *ou* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *ne converge pas, cas douteux (étude plus poussée à faire)*

Preuve de ❶ : si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell < 1$ alors, pour N assez grand et $\forall p \geq 0$, $\dfrac{u_{N+p+1}}{u_{N+p}} \leq k < 1$.
On en déduit par récurrence $u_{N+p} \leq k^p u_N$ pour tous $p \geq 0$.
Puis $\displaystyle\sum_{p=0}^{P} u_{N+p} \leq u_N \sum_{p=0}^{P} k^p$ et cette dernière série géométrique converge (car $0 \leq k < 1$).
Donc les sommes partielles de $\sum u_n$ sont majorées et la série converge. □

7. Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) est un mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français. Son critère est un des plus utilisés.

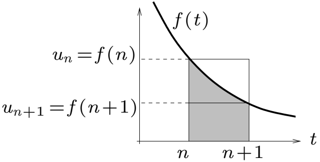
Exercices

1. $u_n = ne^{-2n} \geq 0$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)e^{-2(n+1)}}{ne^{-2n}} = (1+\frac{1}{n})e^{-2} \to e^{-2} < 1$ donc $\sum u_n$ converge.
2. Soit $u_n = \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.
   On démontre que $\sum u_n$ converge absolument. En effet, si $a_n = |u_n| = \frac{|z|^n}{n!} \geq 0$, alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1$ d'où $\sum a_n$, et par suite $\sum u_n$, convergent.
   Ceci permet de définir **l'exponentielle complexe** [a] $\exp z = e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
3. $\boxed{\text{exo}}$ Étudier les séries de termes généraux $u_n = \frac{n^2}{2^n+n}$ et $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$.

a. C'est la fonction exponentielle que vous connaissez, qui est ainsi étendue à $\mathbb{C}$. Il est remarquable que cette définition ne fasse intervenir que des sommes (infinies) et des produits. Cf. 3A pour une étude plus avancée.

Comparaison séries-intégrales

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\underline{f \geq 0}$, $\underline{f \text{ décroissante}}$,



$u_n = f(n)$

Alors, pour $n \geq 1$, $\boxed{u_{n+1} = f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq u_n = f(n).}$

D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} u_n \leq u_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(t)dt,$

soit encore $\displaystyle\int_1^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} u_n \leq u_1 + \int_1^{N} f(t)dt.$

Théorème 8 (Comparaison séries-intégrales)

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante.

Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(n)$ sont de même nature.

exo Convergence des séries de terme général $u_n = \frac{1}{n \ln n}$ et $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

4. Séries à termes quelconques

On considère $\sum u_n$ avec $\underline{u_n \in \mathbb{C}}$ ou $\underline{u_n \in \mathbb{R}$ qui ne reste pas de signe constant}.

- On commencera toujours d'abord par la **convergence absolue**, c'est-à-dire qu'on étudie $\sum |u_n|$ qui est une série à termes positifs, cf. § précédent.
- Si $\sum u_n$ ne converge pas absolument (cas le plus difficile), essayer le **théorème spécial des séries alternées** (qui suit) ou faire une étude plus poussée : **développement limité de** u_n par exemple.

Théorème spécial des séries alternées

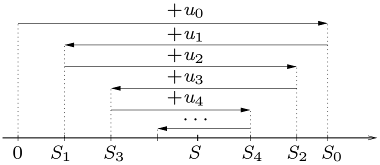
Définition 4 (série alternée)

Une série réelle $\sum u_n$ *est alternée si* u_n *s'écrit* $\pm(-1)^n a_n$ *où* $a_n \geq 0$ *(autrement dit, le signe de* u_n *alterne d'un rang à l'autre).*

Théorème 9 (Théorème spécial des séries alternées)

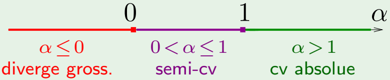
Supposons que $\sum u_n$ *soit une série* alternée *telle que* $|u_{n+1}| \leq |u_n|$ *(décroissance des* a_n*) et* $u_n \to 0$*. Alors* $\sum u_n$ *converge.*

Remarque : si $\sum u_n$ alternée satisfait le théorème alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est toujours comprise entre deux valeurs successives des sommes partielles (exo), comme illustré sur la figure. C'est important pour le calcul numérique.



Exercice corrigé : **Étude de $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$**

- Convergence absolue ? $a_n = |u_n| = \frac{1}{n^\alpha}$, $\quad \sum |u_n|$ converge $\Longleftrightarrow$ $\underline{\alpha > 1}$.
- $\alpha \leq 0$: $u_n \not\to 0$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- $0 < \alpha \leq 1$: $\sum u_n$ alternée, $a_n = |u_n| = \frac{1}{n^\alpha}$ décroît vers 0
  donc $\sum u_n$ converge par le théorème des séries alternées
  $\sum u_n$ est semi-convergente.
- Conclusion :



Transformation d'Abel[9]

Théorème 10 (Théorème d'Abel)

Soit $\sum u_n$ avec $u_n = a_n v_n$.

- $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ *est* <u>*borné*</u> *:* $|V_n| \le C$ *(avec C indépendant de n)*
- *La suite (a_n) est* <u>*décroissante*</u> *:* $a_{n+1} \le a_n$
- *La suite (a_n)* <u>*tend vers 0*</u>.

Alors $\sum u_n$ converge.

exo Démontrer que $\sum \frac{\sin n}{n}$ converge.[8]

exo Comprendre pourquoi le Théorème spécial des séries alternées est un cas particulier de la transformation d'Abel.

exo⋆ Si S_N est la somme partielle de $\sum u_n$ et V_N celle de $\sum v_n$, établir

$S_N = a_N V_N + \sum_{n=0}^{N-1} V_n(a_n - a_{n+1})$. En déduire une preuve du Théorème d'Abel.

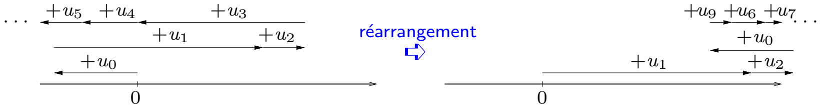
8. Ici on demande d'utiliser le Théorème d'Abel ; on verra une autre méthode avec les séries de Fourier dans le Chapitre 4.

9. Niels Henrik Abel (1802–1829) mathématicien norvégien ; son nom est donné à un prix qui correspond au prix nobel de mathématiques.

5. Remarques, exercices

5.1. Réarrangement de l'ordre des termes d'une série convergente.

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Que se passe-t-il si on réarrange l'ordre des termes ?



$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots \qquad \tilde{S} = u_1 + u_2 + u_0 + u_9 + u_6 + u_7 + \cdots$$

- Si $\sum u_n$ **converge absolument**, la nouvelle série converge encore absolument vers la même somme [10].
- si $\sum u_n$ est **semi-convergente**, tout peut arriver : la nouvelle série peut être divergente ou converger vers n'importe quelle valeur.

10. on a donc une propriété de "commutativité de sommes infinies".

5.2. Produit de Cauchy de deux séries

Définition 5 (Produit de Cauchy)

Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries, le produit de Cauchy est la série* $\sum w_n$ *de terme général* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème 11 (Convergence du produit de Cauchy)

Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries absolument convergentes alors leur produit de Cauchy* $\sum w_n$ *est lui-même une série absolument convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Remarque :

- ⚠Le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes peut ne pas converger.
- Le théorème donne une formule de "distributivité pour un produit de sommes infinies".
- exo Pour $a, b \in \mathbb{C}$, calculer le produit de Cauchy des séries $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{b^n}{n!}$ et en déduire la formule $e^a e^b = e^{a+b}$.

5.3. Remarque sur le calcul numérique d'une série

Quand $\sum u_n$ est convergente, le calcul exact de sa somme est en général inaccessible[11]. On approche sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ en calculant les sommes partielles S_N pour N assez grand. Pour obtenir une bonne approximation, tout consiste à estimer convenablement le reste R_N.

Exemple : **Estimation du reste des séries de Riemann pour $\alpha > 1$**

Soit $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Cette série converge (cf. page 11).
D'après la comparaison série-intégrale (cf. page 19), on obtient

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{N}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha},$$

d'où en calculant : $\boxed{\frac{1}{(\alpha-1)(N+1)^{\alpha-1}} \leq R_N \leq \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}.}$

exo Combien faut-il calculer de termes de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ pour être sûr d'avoir une estimation de la somme à 10^{-3} près ?

11. sauf dans des cas très particuliers : séries géométriques (cf. page 10), séries télescopiques (cf. page 5 et TD), utilisation de séries entières (cf. Chapitre 3) ou de séries de Fourier (cf. Chapitre 4).

5.4. Exercices corrigés

Exercice corrigé : **Étudier la convergence de $\sum \sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}$**

Le terme général $u_n = \sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}$ est défini pour $n \geq 1$ et est positif.

Comme les critères de comparaison, d'Alembert et de comparaison séries-intégrales ne s'appliquent pas facilement, on va essayer le critère des équivalents. Pour trouver un équivalent de u_n, on va utiliser un DL (ou plus précisément un DA–développement asymptotique) de u_n.

$$u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right) = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - 1\right) = \frac{1}{2n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}})$$

Donc $u_n \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$ et comme $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ sont deux séries à termes positifs, elles sont de même nature par le critère des équivalents. Mais $\sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ est une série de (référence de) Riemann, convergente car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

$\boxed{\text{Donc } \sum u_n \text{ converge.}}$

Remarque : ici on pouvait utiliser (de façon plus élémentaire) la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n})(\sqrt{n+\frac{1}{n}} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+\frac{1}{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{n(\sqrt{n+\frac{1}{n}} + \sqrt{n})} \sim \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Exercice corrigé : **Étudier la convergence de $\sum \sin\left(\frac{n^2+2n+1}{n}\pi\right)$**

La série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n^2+2n+1}{n}\pi\right)$, défini pour $n \geq 1$, ne semble pas être de signe constant. On ne voit pas trop pourquoi $\sum |u_n|$ convergerait absolument et enfin $\sum u_n$ ne paraît pas alternée. On est donc a priori dans le cas le plus difficile.

On essaie de simplifier u_n (quitte à faire un DL au besoin) :

$u_n = \sin\left(n\pi + 2\pi + \frac{\pi}{n}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$

On remarque que $\sum |u_n|$ ne converge pas absolument (car $|(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)| \sim \frac{\pi}{n}$ et $\sum \frac{\pi}{n}$ diverge) mais qu'en fait $\sum u_n$ est <u>alternée</u> (car $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0$ pour $n \geq 1$) et que $|u_n| = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ <u>décroît</u> <u>vers 0</u>. Cela permet de conclure à la $\boxed{\text{convergence}}$ en invoquant le <u>théorème spécial des séries alternées</u>.

Exercice corrigé : **Calcul de** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Tout d'abord, $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge par théorème spécial des séries alternées.

Méthode 1 :

$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n}\right)$

$= \gamma + \ln(2n) + o(\frac{1}{2n}) - \left(\gamma + \ln(n) + o(\frac{1}{n})\right) = \ln 2 + \ln n - \ln n + o(\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\to} \ln 2$

(en utilisant le développement asymptotique de la série harmonique, cf. page 16).

Méthode 2 : On remarque que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,dt$ pour $k \geq 1$.

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^{k+1} t^{k-1}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right) dt.$$

Comme $-t \neq 1$ pour $t \in [0,1]$, on a : $\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$ (série géométrique).

D'où $S_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = \ln 2 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt.$

Mais $\left|\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, donc $S_n \underset{n\to\infty}{\to} \ln 2.$

Exercice corrigé : Supposons que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes à termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n$.

Par définition, si $u_n \sim v_n$, alors $\forall \varepsilon \geq 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon$, $1-\varepsilon \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1+\varepsilon$.
(Cela traduit le fait que $\frac{u_n}{v_n} \to 1$).

D'où $\forall n \geq N \geq N_\varepsilon$, $(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$ et en sommant de $N+1$ à $+\infty$:

$$(1-\varepsilon)\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \leq (1+\varepsilon)\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n,$$

soit encore,

$$\forall N \geq N_\varepsilon, \quad (1-\varepsilon) \leq \frac{\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n}{\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n} \leq (1+\varepsilon)$$

ce qui est exactement le résultat souhaité puisque cela prouve que le quotient des restes tend vers 1 quand $N \to +\infty$.

Exercice : Preuve de la formule de Stirling $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$.

La formule de Stirling[a] donne un équivalent très pratique qui permet d'obtenir des ordres de grandeur de $n!$

1. Soit $v_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$. Étudier la série $\sum \ln v_{n+1} - \ln v_n$.
2. En déduire que v_n a une limite strictement positive K et que donc $n! \sim K\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$.
3. (Calcul de K avec les intégrales de Wallis[b]) Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (i) Montrer que $\forall n \geq 2,\ nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
   (ii) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$ et $I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.
   (iii) Montrer que $I_{2p+2} \leq I_{2p+1} \leq I_{2p}$ et en déduire que $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!\sqrt{2p}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
   (iv) En utilisant l'équivalent de factoriel obtenu ci-dessus, en déduire que $K = \sqrt{2\pi}$.

---

a. James Stirling (1692–1770) mathématicien écossais.
b. John Wallis (1616–1703) mathématicien anglais.

Exercice : Nombre de décimales de π calculées en une itération avec la formule de Chudnovsky (cf. page 2).

Emma Haruka Iwao a calculé en s'appuyant sur cette formule, 100 000 milliards de décimales de π. Pour se donner une idée, si on imprimait toutes ces décimales dans un livre, celui-ci ferait 480 km d'épaisseur ! Mais combien a-t-elle eu besoin d'itérations pour obtenir ce nombre de décimales ? Plus précisément, l'approximation de π est calculée à partir d'une somme partielle S_N de la série ci-dessus pour N assez grand. Combien gagne-t-on de décimales en calculant S_{N+1} à la place de S_N ?

1. Calculer un équivalent de u_n à l'aide la formule de Stirling (page 31) et trouver $A, q > 0$ tels que que $|u_n| \leq v_n := Aq^n$ pour n assez grand.
2. Soit R_N le reste de $\sum u_n$ et $\tilde{R}_N$ le reste de $\sum v_n$. Démontrer que $|R_N| \leq \tilde{R}_N$.
3. Démontrer que $\tilde{R}_{n+1} = q\tilde{R}_n$ et en déduire une expression de $\tilde{R}_n$.
4. Expliquer pourquoi, si $q = a \cdot 10^{-b}$ avec $0 \leq a < 10$, alors, pour n grand, b est environ le nombre de décimales supplémentaires gagnée dans le calcul de $\tilde{S}_{n+1}$ par rapport à celui de $\tilde{S}_n$ (où $\tilde{S}_n$ est la somme partielle de $\sum v_n$).
5. Calculer b et conclure.

6. Tableau synthétique pour l'étude d'une série numérique

Pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$:

1. Peut-on calculer les sommes partielles S_N ? (chercher la limite : cf. page 5)
2. Le terme général u_n tend-il vers 0 ? (sinon la série diverge grossièrement)
3. La série est-elle à termes positifs ?
    1. Critère de comparaison (cf. page 13)
    2. Critère des équivalents (cf. page 15)
    3. Règle de d'Alembert (cf. page 17)
    4. Comparaison séries-intégrales (cf. page 19)
4. La série est à termes quelconques.
    1. La série converge-t-elle absolument ? Étudier $\sum |u_n|$, cf. ❸.
    2. Le théorème spécial des séries alternées s'applique-t-il ? (cf. page 21)
    3. Le théorème d'Abel s'applique-t-il ? (cf. page 23)
    4. Autres... Commencer par étudier plus précisément u_n (DL, DA, etc.)