ne rien écrire

Exo1 : Exo2 :

Exo3 : Exo4 :

NOM Prénom + code barre

2ème année STPI 2021-2022

DEVOIR SURVEILLÉ D'ANALYSE 3 ;

Vendredi 14 janvier 2022 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique interdits

Travaillez au brouillon avant de rédiger synthétiquement en n'utilisant que la place prévue.

Exercice 1. 1.1. Déterminer, puis représenter dans le premier repère de Figure 1, le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f définie par : $f(x,y) = \dfrac{\ln(y+x^2)}{\ln(y-x)}$.

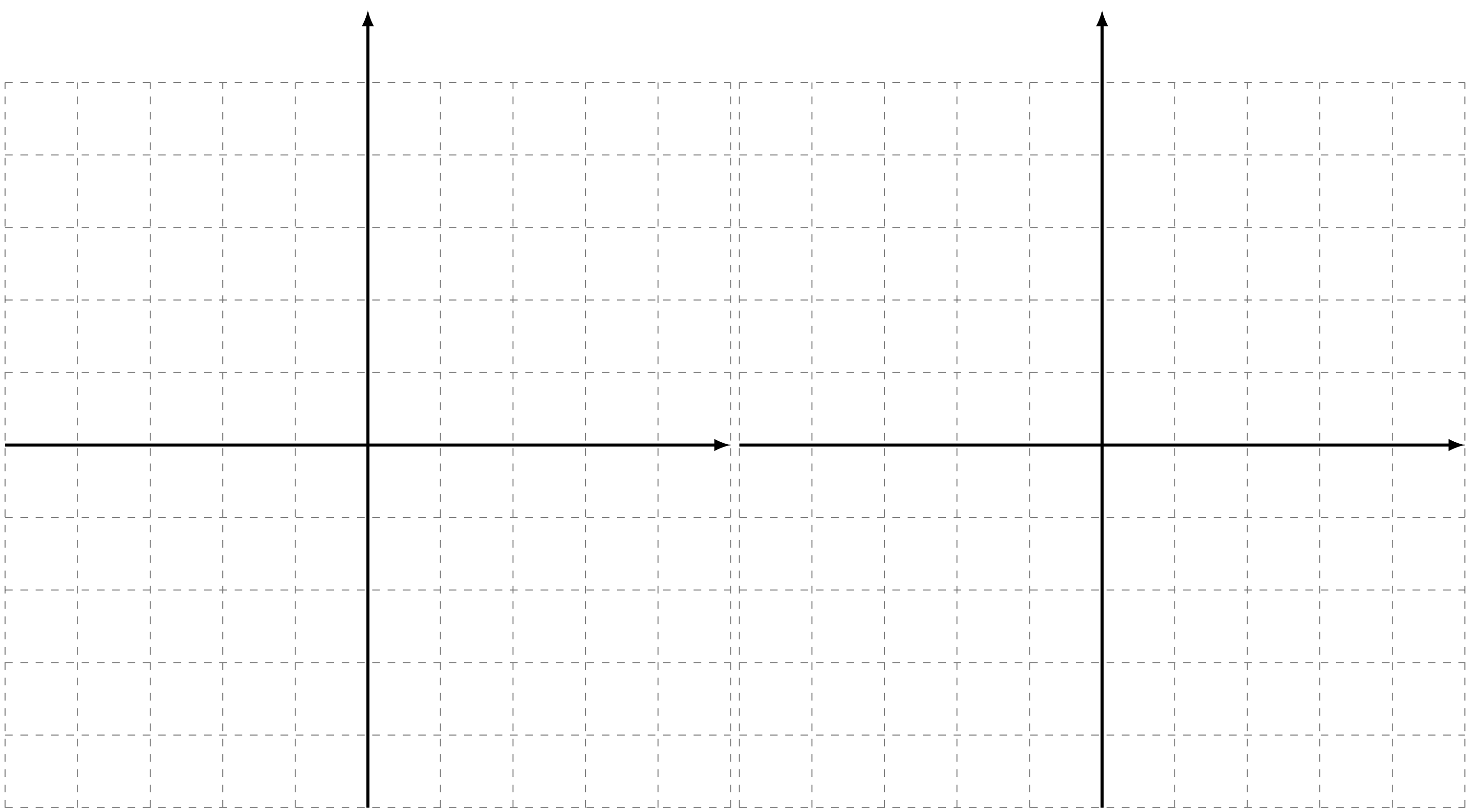

FIGURE 1

1.2. Déterminer, puis représenter dans le deuxième repère de Figure 1, la ligne de niveau $L_c(g)$, pour $c = \ln(2)$, de la fonction g définie par : $g(x,y) = \ln(y-x)$.

1.3. Calculer le gradient de la fonction h définie par : $h(x,y) = \ln(y+x^2)$ en tout point (x_0, y_0) de son domaine de définition $\mathcal{D}_h$ et donner l'équation du plan tangent au point $(0, e)$.

$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) =$

$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) =$

L'équation du plan tangent est : .

Exercice 2. On considère f la fonction créneau de période 2π, $f(t) = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad t \in [0, \pi/2[, \\ 0 & \text{si} \quad t \in [\pi/2, 2\pi[. \end{cases}$

2.1. Justifer l'existence du développement en série de Fourier associé à f et déterminer la relation qui existe entre la fonction f et sa série de Fourier qu'on notera $S(f)(t)$.

2.2. Déterminer les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n pour $n > 0$ et la série de Fourier $S(f)(t)$.

$a_0 =$ Formule :

$a_n =$ Formule :

$b_n =$ Formule :

$S(f)(t) =$

2.3. En déduire la valeur suivante (*pas de calculs mais indiquer la méthode utilisée*)

$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} =$ Méthode :

Exercice 3. 3.1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x, y) = (x^2 + y^2)\exp(-y)$.
Déterminer sur $\mathbb{R}^2$ les points critiques de h et discuter leur nature (extremum local, point selle, etc).

3.2. On considère maintenant sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions : $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $g(x, y) = 4y^2 - x^2 - 4$.

Déterminer les solutions du problème : **(I)** Minimiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$, à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Exercice 4. Soit $h(x,y) = e^{xy} + x^2 - xy - 3x + 2y + 1$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$.

a) Démontrer qu'il existe une fonction ψ définie au voisinage de 1 telle que, au voisinage de $(1,0)$: $(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = \psi(x)$ et calculer $\psi'(1)$ et $\psi''(1)$. *Soyez précis dans la vérification des hypothèses du théorème utilisé.*

b) Montrer que cette fonction admet un développement limité à tout ordre au voinage de $x = 1$ et calculer ce développement limité à l'ordre 2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de ψ au point $x = 1$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente.