

NOM + code barre



Année universitaire 2011-2012  
1ère année STPI

**DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3**  
**Vendredi 8 juin 2012 — durée : 1h30**

*Tous documents et matériel électronique (calculatrices, portables, etc.) interdits*  
*Le sujet comporte 4 exercices indépendants*

**Exercice 1.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ .

La matrice  $A$  est-elle inversible ?

Faire la décomposition  $A = LU$ .

$$L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

et  $U = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

**Exercice 2.** Un intendant doit acheter 40 fournitures pour exactement 100 €. Il a le choix entre des stylos à 1 € pièce, des paires de ciseaux à 4 € et des agendas à 12 €. On appelle  $x_1$  le nombre de stylos,  $x_2$  le nombre de ciseaux et  $x_3$  le nombre d'agendas choisis.

Système d'équations associé au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

Matrice augmentée associée au système

$$\left( \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right)$$

Forme échelon réduite de la matrice augmentée

$$\left( \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right)$$

Système réduit

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

Le problème de départ a-t-il une ou plusieurs solutions ? Si oui, donner précisément la ou les solutions. Si non, justifier.

**Exercice 3.**

**3.1.** Soient  $d > 0$  et  $v_0 \in \mathbb{R}$  des constantes fixées. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y''(t) = -d \text{ pour } t \in [0, +\infty[ \text{ avec } y(0) = 0, y'(0) = v_0.$$

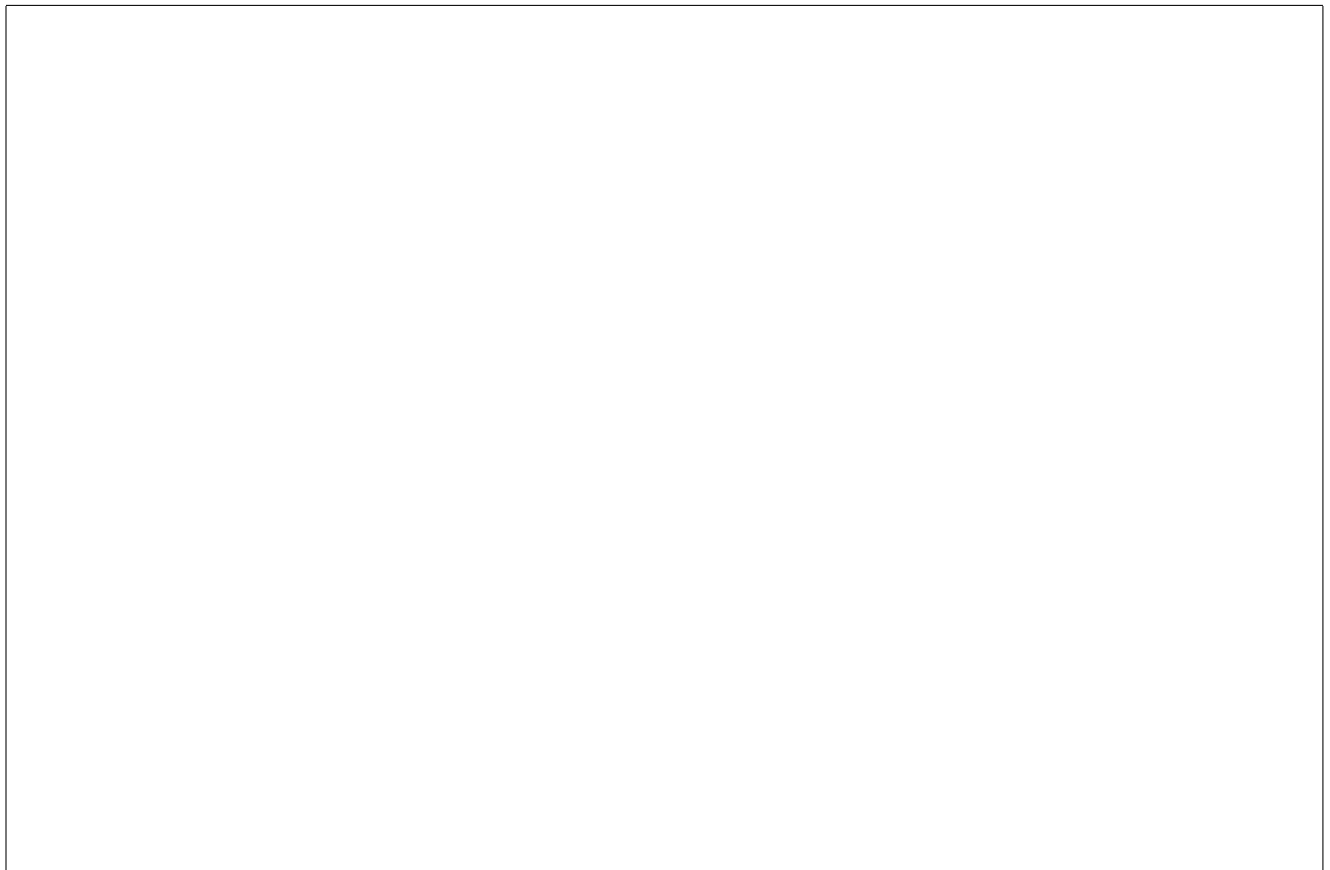
Tracer rapidement la solution dans les 2 cas suivants :  $\{d=1 \text{ et } v_0=0\}$  et  $\{d=1 \text{ et } v_0=1\}$ .



**3.2.** Soient  $b > 0$ ,  $d > 0$  et  $v_0 \in \mathbb{R}$  des constantes fixées. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y''(t) + by'(t) = -d \text{ pour } t \in [0, +\infty[ \text{ avec } y(0) = 0, y'(0) = v_0.$$

Tracer rapidement la solution dans les 2 cas suivants :  $\{b=d=1 \text{ et } v_0=0\}$  et  $\{b=d=1 \text{ et } v_0=1\}$ .



**3.3.** Soient  $b > 0$ ,  $d > 0$ ,  $r > 0$  et  $\omega > 0$  des constantes fixées. Trouver la solution générale de  $y''(t) + by'(t) = -d + r(1 + \sin(\omega t))$  pour  $t \in [0, +\infty[$ .

**3.4.** Dans cette question on considère le mouvement, uniquement vertical, d'une bille d'acier de masse  $m$ . L'axe des ordonnées est orienté vers le haut, la hauteur (l'ordonnée) de la bille en fonction du temps est notée  $y(t)$ . On lâche la bille en  $t = 0$  à la hauteur  $y(0) = 0$  avec une vitesse  $y'(0) = v_0 > 0$  (donc orientée vers le haut). La constante de pesanteur sera notée  $g$ .

*On pourra se servir des résultats des questions précédentes sans refaire les calculs.*

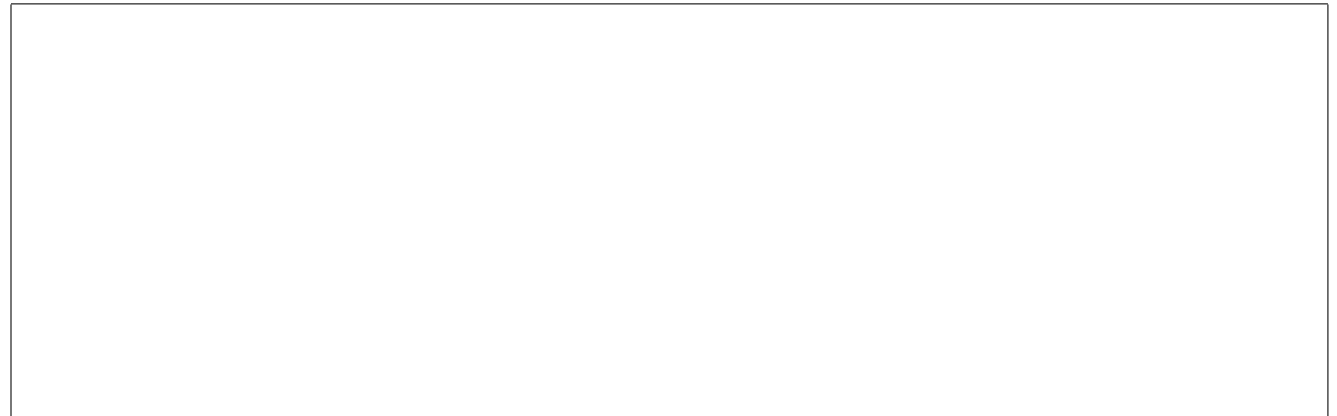
**3.4.a.** On suppose que la bille n'est soumise qu'à la force de pesanteur d'intensité  $mg$  (pas de frottement). Donner l'équation du mouvement, puis  $y(t)$ . Interpréter en une phrase le résultat obtenu.

**3.4.b.** On suppose que la bille est soumise à la force de pesanteur et, en plus, à une force de frottement proportionnelle à la vitesse (s'opposant à celle-ci). On notera  $\alpha > 0$  la valeur absolue du coefficient de proportionnalité. Donner l'équation du mouvement, puis  $y(t)$ . Que peut-on dire

pour la vitesse pour des temps très grands ?

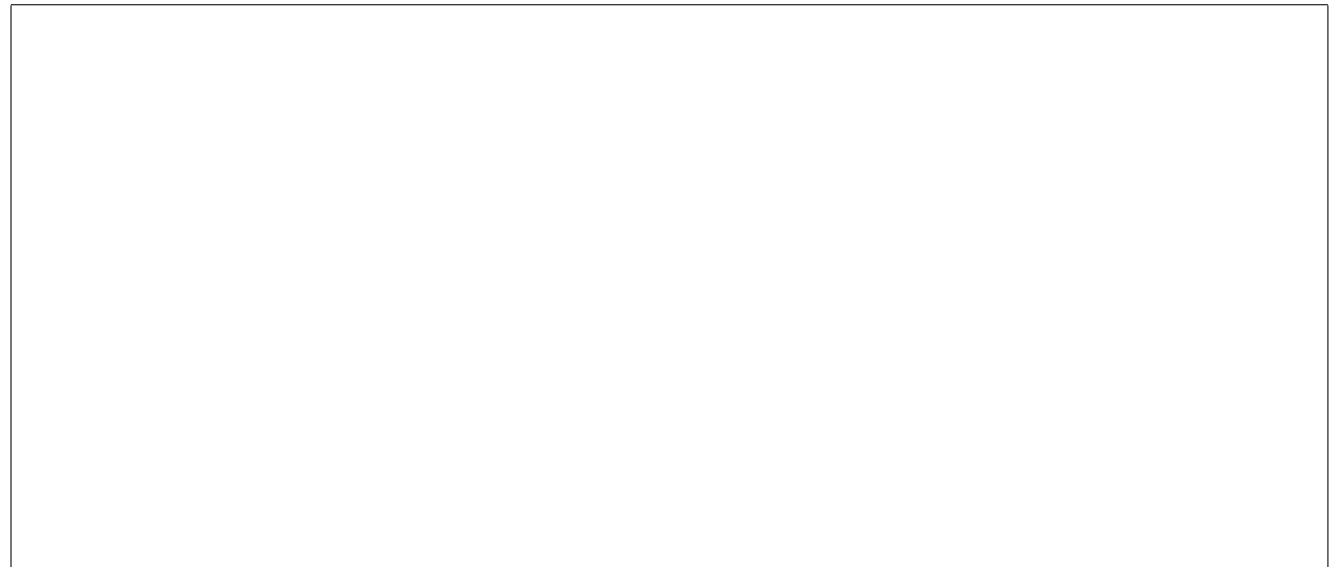


**3.4.c.** Outre la force de pesanteur et la force de frottement introduit dans la question 3.4.b, on suppose que la bille est soumise en plus à une force verticale (par exemple d'origine électromagnétique) dirigée vers le haut d'intensité  $F(1 + \sin(\omega t))$  avec  $F, \omega > 0$ . Donner l'équation du mouvement et la solution générale (sans calculer les constantes d'intégration). Montrer qu'il existe une unique valeur de  $F$  de sorte que la hauteur  $y(t)$  reste bornée.



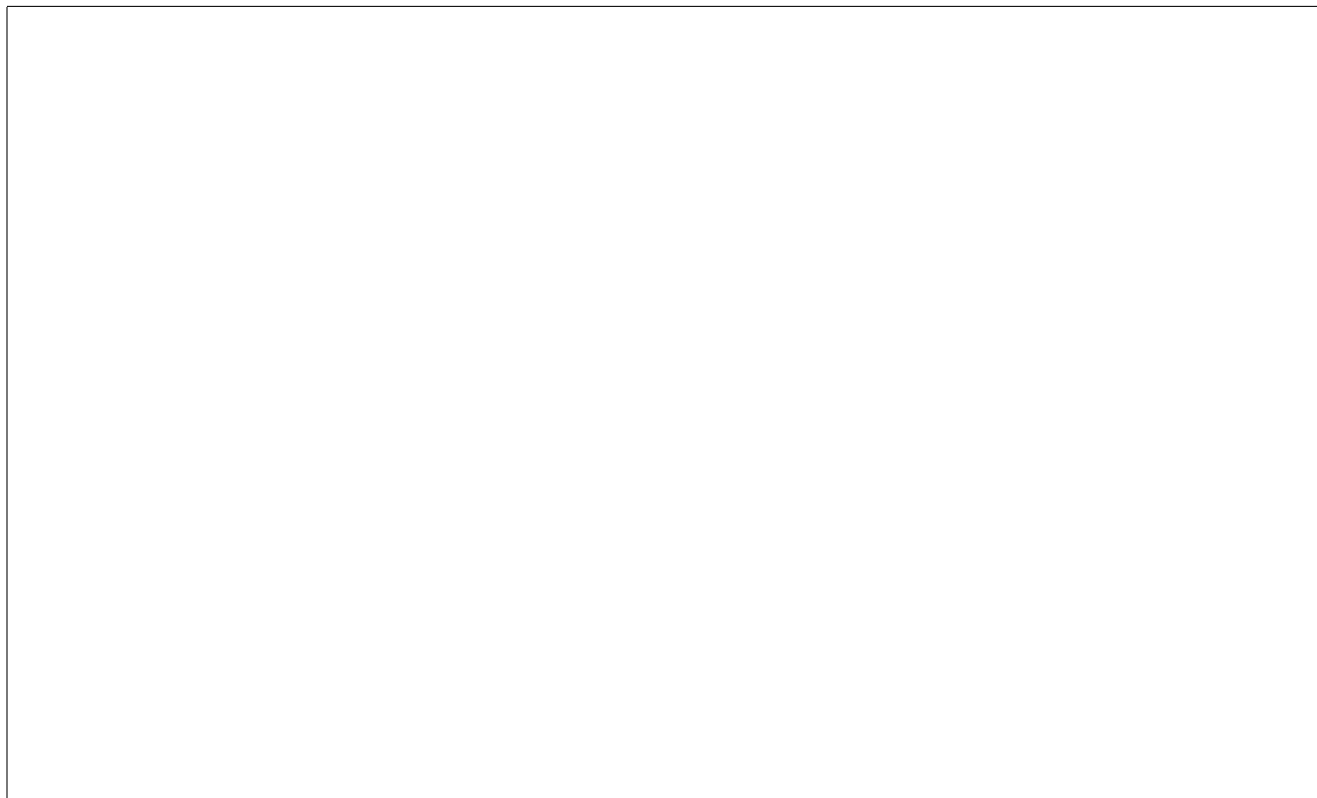
**Exercice 4.** On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$  pour  $x \in [0, +\infty[$  et on cherche à résoudre  $f(x) = 0$  sur  $[0, +\infty[$ .

**4.1.** Tracer l'allure de la fonction  $f$  sur  $[0, +\infty[$  et démontrer que  $f$  a deux racines  $0 \leq \ell_1 < \ell_2$  sur  $[0, +\infty[$ .



**4.2.** Exposer succinctement deux méthodes du cours pour calculer de manière approchée  $l_2$ .  
*Pour chacune des méthodes proposées, on demande de préciser toutes les hypothèses d'application, de les vérifier dans le cas considéré et définir clairement une suite qui converge vers  $l_2$ .*

**4.2.a.** 1ère méthode.



**4.2.b.** 2ème méthode.

