NOM + code barre

Année universitaire 2011-2012
1ère année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Vendredi 8 juin 2012 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique (calculatrices, portables, etc.) interdits
Le sujet comporte 4 exercices indépendants

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

La matrice A est-elle inversible ?

Faire la décomposition $A = LU$. $L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Exercice 2. Un intendant doit acheter 40 fournitures pour exactement 100 €. Il a le choix entre des stylos à 1 € pièce, des paires de ciseaux à 4 € et des agendas à 12 €. On appelle x_1 le nombre de stylos, x_2 le nombre de ciseaux et x_3 le nombre d'agendas choisis.

Système d'équations associé au problème

Matrice augmentée associée au système

Formeéchelon réduite de la matrice augmentée

Système réduit

Le problème de départ a-t-il une ou plusieurs solutions ? Si oui, donner précisément la ou les solutions. Si non, justifier.

Exercice 3.

3.1. Soient $d > 0$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ des constantes fixées. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y''(t) = -d \text{ pour } t \in [0, +\infty[\quad \text{avec } y(0) = 0,\ y'(0) = v_0.$$

Tracer rapidement la solution dans les 2 cas suivants : $\{\, d{=}1$ et $v_0{=}0\}$ et $\{\, d{=}1$ et $v_0{=}1\}$.

3.2. Soient $b > 0$, $d > 0$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ des constantes fixées. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y''(t) + by'(t) = -d \text{ pour } t \in [0, +\infty[\quad \text{avec } y(0) = 0,\ y'(0) = v_0.$$

Tracer rapidement la solution dans les 2 cas suivants : $\{\, b{=}d{=}1$ et $v_0{=}0\}$ et $\{\, b{=}d{=}1$ et $v_0{=}1\}$.

3.3. Soient $b > 0$, $d > 0$, $r > 0$ et $\omega > 0$ des constantes fixées. Trouver la solution générale de $y''(t) + by'(t) = -d + r(1 + \sin(\omega t))$ pour $t \in [0, +\infty[$.

3.4. Dans cette question on considère le mouvement, uniquement vertical, d'une bille d'acier de masse m. L'axe des ordonnées est orienté vers le haut, la hauteur (l'ordonnée) de la bille en fonction du temps est notée $y(t)$. On lâche la bille en $t = 0$ à la hauteur $y(0) = 0$ avec une vitesse $y'(0) = v_0 > 0$ (donc orientée vers le haut). La constante de pesanteur sera notée g.
On pourra se servir des résultats des questions précédentes sans refaire les calculs.

3.4.a. On suppose que la bille n'est soumise qu'à la force de pesanteur d'intensité mg (pas de frottement). Donner l'équation du mouvement, puis $y(t)$. Interpréter en une phrase le résultat obtenu.

3.4.b. On suppose que la bille est soumise à la force de pesanteur et, en plus, à une force de frottement proportionnelle à la vitesse (s'opposant à celle-ci). On notera $\alpha > 0$ la valeur absolue du coefficient de proportionnalité. Donner l'équation du mouvement, puis $y(t)$. Que peut-on dire pour la vitesse pour des temps très grands ?

3.4.c. Outre la force de pesanteur et la force de frottement introduit dans la question 3.4.b, on suppose que la bille est soumise en plus à une force verticale (par exemple d'origine électromagnétique) dirigée vers le haut d'intensité $F(1+\sin(\omega t))$ avec $F, \omega > 0$. Donner l'équation du mouvement et la solution générale (sans calculer les constantes d'intégration). Montrer qu'il existe une unique valeur de F de sorte que la hauteur $y(t)$ reste bornée.

Exercice 4. On considère la fonction f définie par $f(x) = 2(1 - \mathrm{e}^{-x}) - x$ pour $x \in [0, +\infty[$ et on cherche à résoudre $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$.
4.1. Tracer l'allure de la fonction f sur $[0, +\infty[$ et démontrer que f a deux racines $0 \leq \ell_1 < \ell_2$ sur $[0, +\infty[$.

4.2. Exposer succinctement deux méthodes du cours pour calculer de manière approchée ℓ_2.
Pour chacune des méthodes proposées, on demande de préciser toutes les hypothèses d'application, de les vérifier dans le cas considéré et définir clairement une suite qui converge vers ℓ_2.

4.2.a. 1ère méthode.

4.2.b. 2ème méthode.