

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Mercredi 8 novembre 2017 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger synthétiquement !

Exercice 1. Nature des intégrales et séries ci-dessous. "CV" : converge, "DV" : diverge.
Cocher une case à tort sera pénalisé.

1. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n^3 - 3}$ CV DV

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-1/n}$ CV DV

3. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx$ CV DV

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^{1/2}}{\ln n}$ CV DV

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} n(\cos(1/n) - 1)^2$ CV DV

6. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx$ CV DV

Exercice 2. Que peut-on dire (égalité, majoration, minoration) des rayons de convergence R_i des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ dans les cas suivants ?

1. Si $a_n \geq \frac{1}{n}$ alors

2. Si $a_n = n^2 2^{-n}$ alors

3. Si $a_n = (-1)^n n^{-2}(1 + 3^n)$ alors

4. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-4)^n$ converge alors

5. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-4)^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 4^n$ diverge alors

Exercice 3. On considère les trois intégrales suivantes

$$I := \int_0^{\pi/2} \ln t \, dt, \quad J := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) \, dt, \quad K := \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) \, dt.$$

1. Montrer la convergence et calculer I .

2. En déduire la convergence de J .

3. Montrer que $K = J$,

4. puis que $J + K = J - \pi/2 \ln 2$.

5. En déduire J et K .

Exercice 4. On cherche une solution développable en série entière, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, du problème $(P) : y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Établir une relation de récurrence sur les a_n puis en déduire a_n en fonction de n .

Réciproquement, préciser le rayon de convergence de la série obtenue, puis simplifier son expression.

Exercice 5. Si q est un entier strictement positif, on définit $u_k := \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+q)}$
pour $k \geq 1$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Montrer (par récurrence) que $S_n := \frac{1}{q} \left(\frac{1}{q!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+q)} \right)$.

En déduire $S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

***** FIN *****