NOM Prénom + code barre

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2019-2020
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Jeudi 7 novembre 2019 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger synthétiquement.

Exercice 1. Cocher une case Vrai/Faux à tort sera pénalisé.

1.1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge. ☐ Vrai ☐ Faux

1.2. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. ☐ Vrai ☐ Faux

1.3. $\sum \frac{(-4)^n}{n!}$ converge : ☐ Vrai ☐ Faux. Si convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{n!} =$ ☐

1.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique paire définie par $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ pour tout $t \in [0, \pi]$.
Les coefficients de Fourier de f sont :

$a_0 =$ ☐ et pour $n \geq 1$, $a_n =$ ☐, $b_n =$ ☐

1.5. Rayon de convergence de $\sum \ln(n) x^n$: $R =$ ☐

1.6. Développer en série entière : $\frac{x^2}{3+2x} =$ ☐, $R =$ ☐

1.7. Si $\sum a_n x^n$ est de rayon convergence R_a et $\sum b_n x^n$ est de rayon convergence R_b

alors le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n) x^n$ est tel que $R \geq$ ☐

Exercice 2. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$.

2.1. Démontrer que I converge.

2.2. Faire le changement de variable $y = 1/x$ sur l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 3. Pour $n \geq 1$, on définit les suites $a_n = \dfrac{n! e^n}{\sqrt{n} n^n}$ et $u_n = \ln(a_n) - \ln(a_{n+1})$.

3.1. Démontrer que $u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$ puis que la série $\sum u_n$ converge en faisant un développement limité de u_n.

3.2. Déduire de la question précédente que la suite $(\ln(a_n))$ converge vers un réel k. En conclure la formule de Stirling $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} e^k \sqrt{n} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 4. Le but de l'exercice est de démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

4.1. Prouver que l'intégrale généralisée et la série numérique ci-dessus convergent.

4.2. Écrire le développement en série entière de $\dfrac{1}{1+t^2}$ en précisant son rayon de convergence.

4.3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln t \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

4.4. Démontrer que pour tout $t \in]0,1[$, $\displaystyle\left|\ln t \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\right| = \left|(-1)^{N+1} \frac{t^2 \ln t}{1+t^2} t^{2N}\right| \leq M t^{2N}$

où $M = \displaystyle\sup_{t\in]0,1[} \frac{t^2 \ln t}{1+t^2}$. *(On justifiera que ce supremum est fini.)*

4.5. En déduire que $\left|\int_0^1 \ln t \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} dt\right| \leq \frac{M}{2N+1}$.

4.6. Déduire de 4.2, 4.3 et 4.5 que $\left|\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}\right| \leq \frac{M}{2N+1}$ et conclure.