Année universitaire 2011-2012

2$^{\text{ème}}$ année STPI

17 janvier 2012. Durée : 1h30.

Nombre de pages : 6

Code barre
à coller ici

Devoir surveillé
Analyse 4

Documents et appareils électroniques interdits

Toutes les réponses doivent être impérativement reportées sur les pages du sujet.

Exercice 1 Soient $\alpha > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f admet une dérivée partielle première par rapport à x en $(0,0)$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

2. Montrer que f admet une dérivée partielle première par rapport à y en $(0,0)$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

3. Montrer, en utilisant la définition, que f est différentiable en $(0,0)$ si, et seulement si,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

4. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que f soit différentiable en $(0,0)$. On pourra passer en coordonnées polaires.

5. Est-il nécessaire que la condition obtenue en 4) soit satisfaite pour que f soit continue en $(0,0)$?

Exercice 2 On veut résoudre l'équation aux dérivées partielles

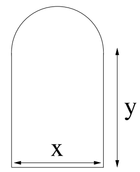
$$-x^2 - y^2 + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \forall\ (x, y) \in\ ]0, +\infty[\times\mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Effectuer un changement de variables en coordonnées polaires $\big(f(x, y) = g(r, \theta)\big)$.

2. Résoudre la nouvelle équation aux dérivées partielles obtenue.

3. En déduire la solution $f(x, y)$ de (1).

Exercice 3 L'ouverture d'un conduit d'air a la forme suivante



Pour optimiser le coût de construction, celui-ci doit avoir le plus petit périmètre possible sachant que, pour des raisons de fonctionnement, l'ouverture doit avoir une aire égale à c. Déterminer les dimensions x et y du rectangle de manière à optimiser le coût.

1. Écrire le problème sous forme mathématique.

Minimiser $f(x, y) =$ sous la contrainte $h(x, y) =$

2. Écrire le système vérifié par x, y et le multiplicateur de Lagrange λ.

3. Est-ce que λ peut être nul ?

4. La solution du problème est donnée par :

$\lambda =$, $x =$ et $y =$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2e^x + e^y + x + y - 3 = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ coïncide avec le graphe d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $(0, 0)$.

2. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

3. En déduire l'allure de l'ensemble $\mathcal{C}$ au voisinage de $(0,0)$.