Centre de Mathématiques

Devoir surveillé n° 2 d'analyse 4

Date : Vendredi 15 janvier 2010
Durée : 1h30 (13h30-15h00)
Nombre de pages : **4**

Documents et appareils électroniques interdits - Répondre dans les cadres en justifiant les réponses.

Coller l'étiquette dans ce cadre

NOM :

Prénom :

GROUPE :

Exercice 1

On considère la fonction f définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1) Étudier les extréma locaux de f et préciser leur nature.

2) La fonction f admet-elle un maximum global ou un minimum global sur $\mathbb{R}^2$?

3) On considère maintenant f sur $\mathcal{T} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$. Justifier que $\mathcal{T}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ et que f atteint un maximum global et un minimum global sur $\mathcal{T}$. On ne calculera pas les extremums de f sur $\mathcal{T}$.

4) Soit $\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 3\}$. En utilisant le théorème des fonctions implicites, dont on précisera soigneusement les hypothèses, démontrer qu'au voisinage de $(1, 1)$, l'ensemble $\mathcal{C}$ coïncide avec la courbe représentative d'une fonction $\begin{array}{rcl} \varphi : I \subset \mathbb{R} & \to & J \subset \mathbb{R} \\ y & \mapsto & x = \varphi(y), \end{array}$

de classe C^∞ vérifiant $\varphi(1) = 1$.

5) Calculer $\varphi'(1)$, $\varphi''(1)$ et donner l'allure de $\mathcal{C}$ au voisinage du point $(1, 1)$ (*on pourra utiliser le développement limité d'ordre 2 de φ au voisinage de $y = 1$*).

Exercice 2

Soit $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x\}$. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\Delta} x^2 \, dxdy$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \leq -|y|\}$.

1) Dessiner le domaine $\mathcal{D}$.

2) Déterminer un paramétrage de $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires.

3) Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}, \ n \in \mathbb{N}^*, \ \alpha \geq 0.$

2) $u_n = \left(\alpha + \dfrac{1}{n}\right)^{n}, \ n \in \mathbb{N}^*, \ \alpha > 0.$