NOM Prénom + code barre

Année universitaire 2013-2014
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 4
Mercredi 6 novembre 2013 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique (calculatrices, portables, etc.) interdits
Le sujet comporte 4 pages

Exercice 1. Cocher une case à tort sera pénalisé.

1.1. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. ☐ Vrai ☐ Faux

1.2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge. ☐ Vrai ☐ Faux

1.3. Si f est positive continue et $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. ☐ Vrai ☐ Faux

1.4. Valeurs de α pour lesquelles $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument. ☐

1.5. Valeurs de α pour lesquelles $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge. ☐

1.6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7^n}$ converge. ☐ Vrai ☐ Faux.

En cas de convergence, valeur de la somme : ☐

1.7. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} dx$ converge. ☐ Vrai ☐ Faux.

En cas de convergence, valeur de l'intégrale : ☐

1.8. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge. ☐ Vrai ☐ Faux.

1.9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ converge. ☐ Vrai ☐ Faux.

Tournez svp

Exercice 2. On considère $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-\sqrt{t}} dt$.

2.1. Démontrer que I est une intégrale convergente.

2.2. Calculer la valeur de I. *[On pourra faire un changement de variable $x = \sqrt{t}$ puis des intégrations par parties.]*

Tournez svp

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, 2π-périodique et telle que $f(t) = 1 - \dfrac{2t}{\pi}$ pour tout $t \in [0, \pi]$.

3.1. Tracer la fonction f.

3.2. Calculer les coefficients de Fourier $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ de f.

3.3. Écrire la série de Fourier de f.

Tournez svp

3.5. Expliquer pourquoi la série de Fourier de f converge. Est-elle égale à $f(t)$ pour tout t ? (on citera le théorème utilisé et on justifiera qu'il s'applique bien).

3.6. À l'aide de la formule de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

——— **FIN** ———