INSA de Rennes

Année Universitaire 2010-2011

2e année, Analyse 4

Date : mercredi 10 novembre 2010 **Durée : 1h00**

Tous documents et appareils électroniques interdits.

Vous devez indiquer vos noms et prénoms et coller l'étiquette d'identification au verso avant de rendre la feuille complétée, glissée dans votre copie.

Exercice 1 : Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}dx$, $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}dx$.

1. Montrer que I converge.
2. Montrer que J converge.
3. Comparer I et J à l'aide du changement de variable $t = 1/x$.
4. Calculer $I + J$ et en déduire les valeurs de I et J.

Exercice 2 : Soient $u_k = \dfrac{x^k}{k!}$ où $x \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.

1. Montrer que la série $\sum u_k$ converge absolument.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
3. Soit $f(x) = e^x$. Ecrire le développement de Taylor Mac Laurin de f à l'ordre n en 0 ; on écrira soigneusement le reste.
4. En faisant tendre $n \to +\infty$ dans la formule précédente, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. *On montrera que le reste tend vers* 0...

Tourner SVP

Coller l'étiquette identification :

Nom et Prénom :
Groupe :

Exercice 3 : Dans les phrases suivantes, "CNS" signifie "condition nécessaire et suffisante."

Question :	*Réponse :*
CNS sur α réel pour que $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$ converge :	
CNS sur α réel pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt$ converge :	
CNS sur r réel pour que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$ converge :	
Dans le cas de convergence, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r^k =$	
CNS sur α pour que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ converge absolument :	