DEVOIR SURVEILLÉ TRONC COMMUN 3ème année MATHÉMATIQUES

Durée : 2h – DOCUMENTS, PORTABLES ET CALCULATRICES INTERDITS

Nom : **Prénom :**

Département :

Groupe :

- Cochez directement vos réponses sur la feuille.
- Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des 12 questions du QCM.
- Toute réponse fausse sera comptée négativement.

QCM

Intégration et transformée de Fourier

1. On note $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et $L^2(I)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I. Alors

☐ $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \in L^1([0,1])$ ☐ $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \in L^1(\mathbb{R})$ ☐ $\left(x \mapsto \frac{\sin x}{x}\right) \in L^1(\mathbb{R})$

☐ $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \in L^2([0,1])$ ☐ $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \in L^2(\mathbb{R})$ ☐ $\left(x \mapsto \frac{\sin x}{x}\right) \in L^2(\mathbb{R})$

2. À l'aide d'un changement de variables, le calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a\,(x^2+y^2)}dx\,dy$, $a>0$, donne

☐ a ☐ πa ☐ $\frac{1}{a}$ ☐ $\frac{\pi}{a}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ☐ $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

3. La transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ est $\hat{f}(\xi) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx$, $\xi \in \mathbb{R}$. Alors

☐ $\widehat{1_{[-1,1]}}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$ ☐ $\widehat{e^{-|x|}}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2+\xi^2}$

☐ $\widehat{1_{[-1,1]}}(\xi) = \frac{\cos(2\pi\xi)}{\pi\xi}$ ☐ $\widehat{e^{-|x|}}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\,\xi^2}$

4. À l'aide du théorème de Plancherel, le calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2 d\xi$ donne

☐ 1 ☐ π ☐ 2 ☐ 2π ☐ 4 ☐ 4π

Variables complexes

5. Soit $f(z) = \exp\left(-1/z^2\right)$. Cette fonction

- ☐ n'est holomorphe nulle part
- ☐ est prolongeable par continuité en 0
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$
- ☐ a un pôle d'ordre 2 en 0

6. On définit le logarithme complexe $\text{Log}\,(z)$ sur $\mathbb{C}$ privé de l'axe des réels positifs (pour tout $z \in \mathbb{C} - \{x, x \in \mathbb{R}^+\}$) et l'argument de z est pris dans $]0, 2\pi[$. Que vaut $\text{Log}\left(\sqrt{3} - i\right)$?

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\ln(2) - i\,\frac{\pi}{6}$ ☐ $\ln(2) + i\,\frac{11\pi}{6}$ ☐ $-i\,\frac{\pi}{6}$

7. Soit l'intégrale $\displaystyle\int_{C^+(0,R)} \frac{\sin z}{36 + z^2}\,dz$, où $C^+(0, R)$ est le cercle, parcouru dans le sens trigonométrique, de centre 0 et de rayon R défini par $R := (N+1)/2$ avec N le *dernier chiffre de votre numéro de portable* (9 si vous n'avez pas de portable) à préciser dans la case ☐. L'intégrale vaut :

☐ 0 ☐ $\frac{\pi}{12}(e^6 - e^{-6})$ ☐ $\frac{2\pi}{12}(e^6 - e^{-6})$ ☐ $\frac{3\pi}{12}(e^6 - e^{-6})$ ☐ $\frac{4\pi}{12}(e^6 - e^{-6})$

☐ $\frac{5\pi}{12}(e^6 - e^{-6})$ ☐ $\frac{6\pi}{12}(e^6 - e^{-6})$ ☐ $\frac{7\pi}{12}(e^6 - e^{-6})$ ☐ $\frac{8\pi}{12}(e^6 - e^{-6})$ ☐ $\frac{9\pi}{12}(e^6 - e^{-6})$

8. Combien vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^2}$.

☐ 0 ☐ $\frac{\pi}{4}$ ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ $-\frac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ $-\pi i$ ☐ $+\infty$

Statistique

Des tables de quantiles sont données page 4.

9. Considérons les 10 données suivantes : 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.7 0.9 1.1 1.2 1.6
Les quantiles $Q(1/4), Q(1/2), Q(3/4)$ valent respectivement :

☐ $0.3, 0.6, 1.1$ ☐ $0.2, 0.5, 1$ ☐ $0.3, 0.5, 1.1$ ☐ $0.2, 0.5, 1.1$ ☐ $0.3, 0.6, 1$

10. Considére un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ d'une loi binomiale $\mathrm{Bin}(3, p)$ où le paramètre $p \in]0, 1[$ est inconnu. On choisit $\widehat{p}_n := \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ comme estimateur de p.
On rappelle que l'espérance et variance d'une variable aléatoire X de loi binomial $\mathrm{Bin}(n, p)$ sont $\mathbb{E}[X] = np$, $\mathbb{V}[X] = np(1-p)$.

10.1 Le biais $B(\widehat{p}_n, p)$ et l'erreur quadratique moyenne $\mathrm{EQM}(\widehat{p}_n, p)$ de cet estimateur valent respectivement :

☐ $-1/n,\ 2p/n$ ☐ $0,\ p(1-p)/3n$ ☐ $p,\ 3p(1-p)/n$ $0,\ p/3n$

10.2 On estime la variance σ^2 du modèle $\mathrm{Bin}(3, p)$ par $\widehat{\sigma}_n^2 := 3\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)$. Le biais $B(\widehat{\sigma}_n^2, \sigma^2)$ de cet estimateur est :

☐ 0 ☐ $1/n$ ☐ $-1/3n$ ☐ $-\sigma^2/3n$ ☐ $-\sigma^2/n$

11. Un laboratoire utilise un appareil de mesure optique pour mesurer la concentration des solutions de fluoresceïne. Le résultat d'une mesure est modélisé par une variable aléatoire C de loi normale dont l'espérance est égale à la concentration réelle de la solution. On effectue 9 mesures à partir d'une solution donnée. La moyenne empirique des 9 mesures est $\overline{c}_9 = 4.38$ mg/l et l'écart-type empirique modifié $\sqrt{\widetilde{s}_c^2} = 0.08$ mg/l.

11.1 L'écart-type, garanti par le constructeur, est supposé connu : $\sqrt{\sigma^2} = 0.05$. L'intervalle de confiance pour la concentration réelle de la solution, au niveau de confiance 0.99, vaut :

☐ $\left[4.38 \pm 1.96 \frac{0.05}{\sqrt{9}}\right]$ ☐ $\left[4.38 \pm 1.96 \frac{0.05}{\sqrt{8}}\right]$ ☐ $\left[4.38 \pm 0.0125 \frac{0.05}{\sqrt{9}}\right]$ ☐ $\left[4.38 \pm 2.5758 \frac{0.05}{\sqrt{9}}\right]$

11.2 Maintenant l'écart-type est supposé inconnu et est estimé par $\sqrt{\widetilde{s}_c^2} = 0.08$ mg/l. L'intervalle de confiance pour la concentration réelle de la solution, au niveau de confiance 0.99, est donné par :

☐ $\left[4.38 \pm 3.3554 \frac{0.08}{\sqrt{9}}\right]$ ☐ $\left[4.38 \pm 5.0413 \frac{0.08}{\sqrt{9}}\right]$ ☐ $\left[4.38 \pm 3.3554 \frac{0.08}{\sqrt{8}}\right]$

☐ $\left[4.38 \pm 3.2498 \frac{0.08}{\sqrt{9}}\right]$ ☐ $\left[4.38 \pm 3.2498 \frac{0.08}{\sqrt{8}}\right]$

Tables de quantiles

		α_2									
		0.00	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
α_1	**0.0**	∞	2.5758	2.3263	2.1701	2.0537	1.9600	1.8808	1.8119	1.7507	1.6954
	0.1	1.6449	1.5982	1.5548	1.5141	1.4758	1.4395	1.4051	1.3722	1.3408	1.3106
	0.2	1.2816	1.2536	1.2265	1.2004	1.1750	1.1503	1.1264	1.1031	1.0803	1.0581
	0.3	1.0364	1.0152	0.9945	0.9741	0.9542	0.9346	0.9154	0.8965	0.8779	0.8596
	0.4	0.8416	0.8239	0.8064	0.7892	0.7722	0.7554	0.7388	0.7225	0.7063	0.6903
	0.5	0.6745	0.6588	0.6433	0.6280	0.6128	0.5978	0.5828	0.5681	0.5534	0.5388
	0.6	0.5244	0.5101	0.4959	0.4817	0.4677	0.4538	0.4399	0.4261	0.4125	0.3989
	0.7	0.3853	0.3719	0.3585	0.3451	0.3319	0.3186	0.3055	0.2924	0.2793	0.2663
	0.8	0.2533	0.2404	0.2275	0.2147	0.2019	0.1891	0.1764	0.1637	0.1510	0.1383
	0.9	0.1257	0.1130	0.1004	0.0878	0.0753	0.0627	0.0502	0.0376	0.0251	0.0125

Tab. 1 – **Quantiles « bilatéraux » $z_{1-\alpha/2}$ de la loi normale centrée-réduite**, c'est à dire donne la valeur $z_{1-\alpha/2}$ telle que $\mathbb{P}\{|Z| \geq z_{1-\alpha/2}\} = \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ pour $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

		α								
		0.90	**0.50**	**0.30**	**0.20**	**0.10**	**0.05**	**0.02**	**0.01**	**0.001**
n	**1**	0.1584	1.0000	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	636.6192
	2	0.1421	0.8165	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	31.5991
	3	0.1366	0.7649	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	12.9240
	4	0.1338	0.7407	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	8.6103
	5	0.1322	0.7267	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	6.8688
	6	0.1311	0.7176	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.9588
	7	0.1303	0.7111	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	5.4079
	8	0.1297	0.7064	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	5.0413
	9	0.1293	0.7027	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.7809
	10	0.1289	0.6998	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.5869

Tab. 2 – **Quantiles « bilatéraux »**$t_{n,1-\alpha/2}$ **de la loi de Student à** n **degrés de liberté**, c'est à dire donne la valeur $t_{n,1-\alpha/2}$ telle que $\mathbb{P}\{|T| \geq t_{n,1-\alpha/2}\} = \alpha$ pour $T \sim t_n$