Année universitaire 2015-2016
3ème année

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Mardi 3 novembre 2015 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscriptes, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1.

☐ $\frac{1}{x\ln x} \in \mathrm{L}^1([2,+\infty[)$ ☐ $\frac{1}{x\ln x} \in \mathrm{L}^2([2,+\infty[)$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in \mathrm{L}^1(]-1,1[)$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in \mathrm{L}^2(]-1,1[)$

☐ $x^4e^{-x} \in \mathrm{L}^1([0,+\infty[)$ ☐ $x^4e^{-x} \in \mathrm{L}^2([0,+\infty[)$ ☐ $\sin\frac{1}{x} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\sin\frac{1}{x} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+n\sin^2 x}$ quand $n \to +\infty$?

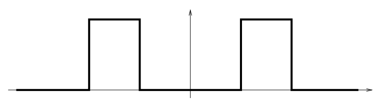
☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{3}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $+\infty$

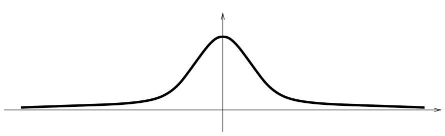
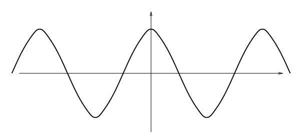
3. Soit $f_1(x) = x\,e^{-x^2}$ et $f_2(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$. Alors $f_1 * f_2(x)$ vaut

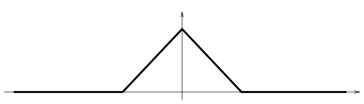
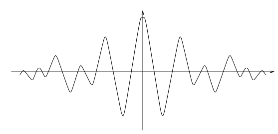
☐ non défini ☐ 0 ☐ $2e^{-(1+x^2)}\mathrm{sh}(x)$ ☐ $e^{-(1+x^2)}\mathrm{ch}(2x)$

☐ $-e^{-(1+x^2)}\mathrm{ch}(2x)$ ☐ $e^{-(1+x^2)}\mathrm{sh}(2x)$ ☐ $-e^{-(1+x^2)}\mathrm{sh}(2x)$ ☐ $-2e^{-(1+x^2)}\mathrm{ch}(2x)$

4. Donner l'allure de la transformée de Fourier du signal f



☐  ☐ 

☐  ☐ 

☐ on ne peut pas tracer car $\hat{f}$ est complexe

5. Soient deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})\cap\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ avec f deux fois dérivable et $f', f'' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})\cap\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On suppose que $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = g(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$. Alors $\hat{f}(\xi)$ vaut

☐ $\hat{g}(\xi)$ ☐ $\dfrac{\hat{g}(\xi)}{4\pi^2\xi^2+1}$ ☐ $\dfrac{\hat{g}(\xi)}{(2\pi i\xi+1)^2}$ ☐ $\dfrac{\hat{g}(\xi)}{(2\pi i\xi-1)^2}$ ☐ $\dfrac{\hat{g}(\xi)}{(2\pi\xi+i)^2}$

6. Supposons que dans la question 5, on ait $g(x) = H(x)e^{-x}$ où H est la fonction d'Heaviside. Dans ce cas, $f(x)$ vaut

☐ 0 ☐ $H(x)\dfrac{x^2}{2}e^{-x}$ ☐ $H(-x)\dfrac{x^2}{2}e^{x}$ ☐ $H(x)\dfrac{x^3}{6}e^{-x}$ ☐ $H(-x)\dfrac{x^3}{6}e^{x}$ ☐ $\dfrac{x^2}{2}e^{-|x|}$ ☐ $\dfrac{x^3}{6}e^{-|x|}$

7. Quelle est la valeur de la transformée de Fourier $\hat{h}(\xi)$ de $h(x) = e^{-x^2}\mathrm{sh}(2x)$? (On pourra utiliser la question 3).

☐ n'existe pas ☐ $\sqrt{\pi}e^{1-\pi^2\xi^2}\sin(2\pi\xi)$ ☐ $-\sqrt{\pi}e^{1-\pi^2\xi^2}\sin(2\pi\xi)$

☐ $-i\sqrt{\pi}e^{\pi^2\xi^2}\sin(2\pi\xi)$ ☐ $-i\sqrt{\pi}e^{1-\pi^2\xi^2}\sin(2\pi\xi)$ ☐ $i\,e^{-\pi^2\xi^2}\mathrm{ch}(2\xi)$

Analyse complexe

8. On définit le logarithme complexe principal $\mathrm{Log}\,(z)$ sur $\mathbb{C}$ privé de l'axe des réels négatifs (pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$) et l'argument de z est pris dans $]-\pi, \pi[$. Soit $f(z) = \dfrac{\mathrm{Log}(1+z)}{z^{30}}$. Alors

- ☐ f n'est holomorphe nulle part
- ☐ f est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ f est holomorphe sur $D(0,1)$
- ☐ f est holomorphe sur $D(0,1)\setminus\{0\}$
- ☐ f est holomorphe sur $D(1,2)$
- ☐ $f(i)$ n'est pas défini
- ☐ $f(i) = 0$
- ☐ $f(i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$
- ☐ $f(i) = -\ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$
- ☐ $f(i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$
- ☐ $f(i) = -\ln 2 - i\frac{\pi}{4}$
- ☐ $f(i) = -\ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{2}$

9. Pour la fonction f définie dans la question 8, Rés$(f, 0)$ vaut

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{30}$ ☐ $-\dfrac{1}{30}$ ☐ $\dfrac{1}{29}$ ☐ $-\dfrac{1}{29}$ ☐ 1 ☐ -1.

10. Soit $h(z) = \dfrac{1}{5+z}$. Le développement en série entière de h en $z = 1$ est :

☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(z-1)^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} z^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(z-1)^n$

☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n+1}} z^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n}(z-1)^n$ ☐ il n'existe pas.

11. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+2i\sin t}$ est

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ 2π ☐ -2π ☐ $\frac{2i\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $-\frac{2i\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $-\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $2\pi i$ ☐ $-2\pi i$.

12. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2i\sin t}$ est

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ 2π ☐ -2π ☐ $\frac{2i\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $-\frac{2i\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $-\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $2\pi i$ ☐ $-2\pi i$.

13. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2dt}{1+4\sin^2 t}$ est

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ 4π ☐ -4π ☐ $\frac{4i\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $-\frac{4i\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $\frac{4\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $-\frac{4\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $4\pi i$ ☐ $-4\pi i$.

Correction du DS de novembre 2015
Tronc Commun 3ème année – Outils d'analyse pour l'ingénieur

1. Par primitivation, on voit que la fonction positive $\frac{1}{x\ln x}$ n'est pas dans $L^1([2,+\infty[)$ mais $\frac{1}{x^2\ln^2 x} \leq \frac{1}{x^2}$ pour x assez grand donc $\frac{1}{x\ln x}$ est dans $L^2([2,+\infty[)$. La fonction $1/\sqrt{1-x^2} = 1/\sqrt{(1-x)(1+x)}$ est dans $L^1(]-1,1[)$ mais pas dans $L^2(]-1,1[)$. La fonction x^4e^{-x} est $L^1([0,+\infty[)$ et dans $L^2([0,+\infty[)$. Enfin, $|\sin(1/x)|$ est bornée au voisinage de 0 et est positive équivalente à $1/x$ au voisinage de $\pm\infty$ donc $\sin(1/x)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

2. Quand $n \to +\infty$, la fonction $1/(3x^2 + n\sin^2 x)$ tend vers 0 presque partout (partout sauf là où sinus s'annule) et est dominée par la fonction $1/(3x^2)$ intégrable sur $[1,+\infty[$. Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers 0.

3. Par définition, $f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}}(x-y)e^{-(x-y)^2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(y)dy = \int_{-1}^{1}(x-y)e^{-(x-y)^2}dy = \int_{x-1}^{x+1} t\,e^{-t^2}dt$ par le changement de variable $t = x-y$. Par primitivation on obtient $f_1 * f_2(x) = -(e^{-(x+1)^2} - e^{-(x-1)^2})/2 = e^{-(x^2+1)}\mathrm{sh}(2x)$.

4. La fonction f est paire donc $\hat{f}$ est réelle. La fonction f est nulle en dehors d'un compact donc est dans $L^2(\mathbb{R})$ et décroît très rapidement. Il suit que $\hat{f}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ et est très régulière ; cela exclut la fonction périodique qui n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$ et le "chapeau" qui n'est pas dérivable partout. Enfin, la gaussienne est sa propre transformée de Fourier donc il ne reste que le 2ème cas de possible. On pouvait aussi dire que la transformée d'une fonction créneau est un sinus cardinal (déphasé). Par linéarité de la transformation de Fourier, comme f est la somme de 2 créneaux, $\hat{f}$ est une somme de sinus cardinaux (déphasés) ce qui donne l'allure du 4ème cas. Un calcul donne $\hat{f}(\xi) = \cos(3\xi)\mathrm{sinc}(\xi)$ (à des constantes près).

5. D'après les hypothèses, il est possible de prendre la transformation de Fourier de l'égalité $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = g(x)$ pour obtenir $\widehat{f''}(\xi) + \widehat{2f'}(\xi) + \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$. Comme $\widehat{f''}(\xi) = (2i\pi\xi)^2\hat{f}(\xi)$ et $\hat{f'}(\xi) = (2i\pi\xi)\hat{f}(\xi)$, on obtient $(2i\pi\xi+1)^2\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$; il fallait donc cocher la 3ème case.

6. Si $g(x) = H(x)e^{-x}$ alors $\hat{g}(\xi) = 1/(1+2i\pi\xi)$ donc d'après la question précédente, $\hat{f}(\xi) = 1/(2i\pi\xi+1)^3$. Par injectivité de la transformation de Fourier (ou inversion), on obtient $f(x) = H(x)x^2e^{-x}/2$.

7. Dans la question 3, on a obtenu $f_1 * f_2(x) = e^{-1}h(x)$ donc $\widehat{f_1 * f_2}(\xi) = \hat{f}_1(\xi)\hat{f}_2(\xi) = e^{-1}\hat{h}(\xi)$. Mais $\hat{f}_1(\xi) = \widehat{xe^{-x^2}}(\xi) = (\widehat{e^{-x^2}})'(\xi)/(-2i\pi) = (\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2})'/(-2i\pi) = -i\pi^{3/2}\xi e^{-\pi^2\xi^2}$ et $\hat{f}_2(\xi) = 2\,\mathrm{sinc}(2\pi\xi)$ donc $\hat{h}(\xi) = -2ie\pi^{3/2}\xi e^{-\pi^2\xi^2}\mathrm{sinc}(2\pi\xi) = -i\sqrt{\pi}e^{1-\pi^2\xi^2}\sin(2\pi\xi)$.

8. D'après le cours, la fonction logarithme complexe principal est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ donc $\mathrm{Log}(1+z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1[$. Comme f a un pôle (d'ordre 30) en 0, la seule réponse possible pour l'holomorphie de f était donc que f est holomorphe $D(0,1)\setminus\{0\}$. De plus, $f(i)$ est bien défini et $f(i) = (\ln|1+i| + i\,\mathrm{Arg}(1+i))/i^{30}$ avec $\mathrm{Arg}(1+i) \in]-\pi,\pi[$ et $i^{30} = -1$. On obtient $f(i) = -\ln\sqrt{2} - i\pi/4$.

9. Le point 0 est un pôle d'ordre 29 de f car $z^{29}f(z) = \mathrm{Log}(1+z)/z \to 1$ quand $z \to 0$. On développe donc en série entière en $z = 0$ la fonction holomorphe $z^{29}f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^n$ et le résidu de f en 0 est le coefficient de z^{28} du développement soit $\mathrm{Rés}(f,0) = (-1)^{28}/(28+1) = 1/29$.

10. On a : $\displaystyle\frac{1}{5+z} = \frac{1}{6+z-1} = \frac{1}{6}\frac{1}{1+(z-1)/6} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(z-1)^n$ avec un rayon de convergence de 6.

11. On reconnaît une intégrale en fraction rationnelle de cos et sin. D'après le cours, on introduit $f(z) = \displaystyle\frac{1}{1+2i(z-z^{-1})/(2i)}\frac{1}{iz} = \frac{-i}{(z+(1+\sqrt{5})/2)(z+(1-\sqrt{5})/2)}$ et le seul pôle dans $D(0,1)$ est $(\sqrt{5}-1)/2$ donc l'intégrale est égale à $2\pi i\,\mathrm{Rés}(f,(\sqrt{5}-1)/2) = 2\pi/\sqrt{5}$.

12. Soit on reproduit le raisonnement ci-dessus avec la nouvelle intégrale, soit, plus simplement, on remarque que la nouvelle intégrale est la conjuguée de la précédente donc est égale car la valeur est réelle. Il fallait cocher là-aussi $2\pi/\sqrt{5}$.

13. L'intégrale demandée est la somme des intégrales des questions 11 et 12 donc vaut $4\pi/\sqrt{5}$.