INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2016-2017
3ème année

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Jeudi 10 novembre 2016 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Seuls documents permis : les notes de cours et de TD personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1.

☐ $\frac{1}{t^2+\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ ☐ $\frac{1}{t^2+\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ ☐ $e^{-t}\ln(t) \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ ☐ $\frac{e^t}{t^2+e^t} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

☐ $\frac{\sin(e^t)}{1+t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\frac{\sin(e^t)}{1+t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\frac{\sin(t)}{t} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\frac{\sin(t)}{t} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-(\sin x)^n}{x^2}dx$ quand $n \to +\infty$?

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ -1 ☐ 1 ☐ -2 ☐ 2 ☐ $+\infty$

3. La transformée de Fourier de $e^{-|t-1|} + e^{-|t+1|}$ vaut

☐ $\dfrac{4}{1+\xi^2}$ ☐ $\dfrac{4\cos(2\pi\xi)}{1+\xi^2}$ ☐ $\dfrac{4}{1+4\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{4e^{2i\pi\xi}}{1+4\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{4\cos(2\pi\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{4\sin(2\pi\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$

4. La transformée de Fourier de $t\,e^{-t^2/2}$ vaut

☐ n'existe pas ☐ $(2\pi)^{3/2}\xi e^{-2\pi^2\xi^2}$ ☐ $-i(2\pi)^{3/2}\xi e^{-2\pi^2\xi^2}$

☐ $-i(2\pi)^{3/2}e^{-2\pi^2\xi^2}$ ☐ $-i\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{3/2}\xi e^{-\pi^2\xi^2/2}$ ☐ $i\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{3/2}\xi e^{-\pi^2\xi^2/2}$

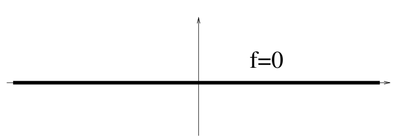
5. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ deux fois dérivable avec $f', f'' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ telle que f soit solution de l'équation différentielle $-f''(x)+f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$. Alors $\hat{f}(\xi)$ vaut

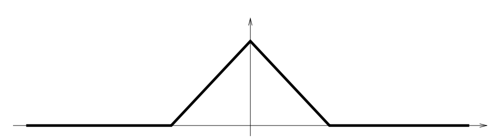
☐ $2\,\mathrm{sinc}(2\pi\xi)$ ☐ $\dfrac{\mathrm{sinc}(2\pi\xi)}{2\pi^2(1+\xi^2)}$ ☐ $\dfrac{2\,\mathrm{sinc}(2\pi\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{2\,\mathrm{sinc}(2\pi\xi)}{1-4\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{-2i\,\mathrm{sinc}(2\pi\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$

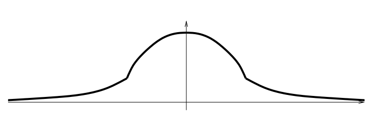
6. La fonction $f(x)$ de la question 5 vaut

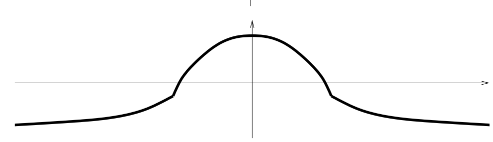
☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}e^{-|x|} * \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ ☐ $e^{-|x|} * \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ ☐ $2\,e^{-|x|} * \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ ☐ $e^{-2|x|} * \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$

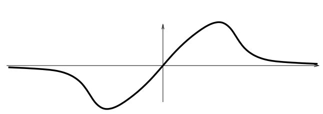
7. Donner l'allure de la fonction $f(x)$ trouvée dans la question 6.

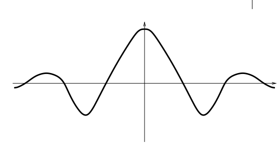
☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

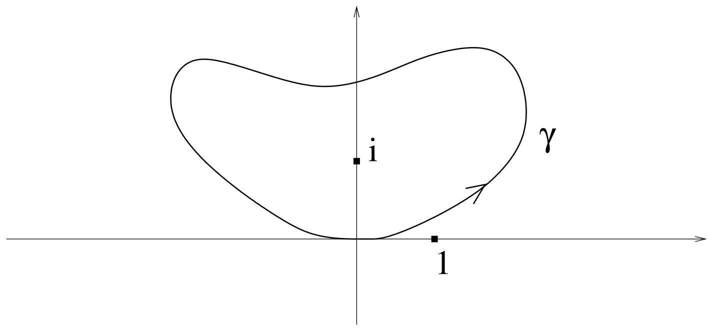
☐ 

☐ 

Analyse complexe

8. Soit $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^2+1/4}$ et γ le chemin représenté sur le dessin ci-dessous.

On considère $I = \displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ et $J = \displaystyle\int_\gamma (z - \frac{i}{2}) f(z)dz$.



☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\})$

☐ $I = 0$ ☐ $I = -2\pi\, e^{-1/4}$ ☐ $I = 2\pi\, e^{-1/4}$ ☐ $I = 2\pi i$ ☐ I n'existe pas.

☐ $J = 0$ ☐ $J = -2\pi\, e^{-1/4}$ ☐ $J = 2\pi\, e^{-1/4}$ ☐ $J = 2\pi i$ ☐ J n'existe pas.

9. Soit $h(z) = \dfrac{z}{z+i}$. Le développement en série entière de h en $z = 1$ est :

☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{i^n} z^n$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{1+i} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} i}{(1+i)^{n+1}} (z-1)^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} i}{(1+i)^{n+1}} (z-1)^n$

☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+i}{(1+i)^{n+1}} (z-1)^n$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{1+i} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+i}{(1+i)^{n+1}} (z-1)^n$ ☐ il n'existe pas.

10. Le rayon de convergence R de la série entière obtenue dans la question 9 est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{3}$ ☐ 2 ☐ $\sqrt{5}$ ☐ $+\infty$.

11. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(t^2+2)(t^2+3)} dt$ est

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\pi\left(\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} - \frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$ ☐ $\pi\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right)$ ☐ $\pi i\left(\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} - \frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$ ☐ $\pi i\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right)$

12. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(t^2+2)(t^2+3)} dt$ est

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\pi\left(\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} - \frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$ ☐ $\pi\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right)$ ☐ $\pi i\left(\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} - \frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$ ☐ $\pi i\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right)$

Correction du DS de novembre 2016 "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $\frac{1}{t^2+\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}\right| \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\left|\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}\right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc $\frac{1}{t^2+\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$. Comme $\left|\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}\right|^2 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t}$, $\frac{1}{t^2+\sqrt{t}} \notin \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$.
$e^{-t}\ln(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Comme $t^2|e^{-t}\ln(t)| \underset{+\infty}{\to} 0$, on a $e^{-t}\ln(t) \in \mathrm{L}^1(]1,+\infty[)$. D'autre part, $|e^{-t}\ln(t)| \underset{0}{\sim} -\ln(t)$ et $\ln(t) \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$ car $\int \ln(t)dt = t\ln(t) - t + \text{cste}$. Finalement $e^{-t}\ln(t) \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$.
$\left|\dfrac{e^t}{t^2+e^t}\right| \underset{+\infty}{\sim} 1$ donc $\frac{e^t}{t^2+e^t} \notin \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
$\frac{\sin(e^t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $\left|\dfrac{\sin(e^t)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, $\frac{\sin(e^t)}{1+t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
$\frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (cf. cours) mais $\frac{\sin(t)}{t} \notin \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ (cf. TD). Comme $\left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right|^2 \leq \dfrac{1}{t^2}$ sur $]1,+\infty[$, $\frac{\sin(t)}{t} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ (cf. aussi TD).

2. On a $(\sin x)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$ (plus précisément partout sauf aux points $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, là où $\sin = \pm 1$). Donc $f_n(x) := \dfrac{1-(\sin x)^n}{x^2} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{x^2}$ p.p. sur $\mathbb{R}$. D'autre part, on a l'hypothèse de domination $|f_n(x)| \leq \frac{1}{x^2} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[)$. Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$.

3. En utilisant la formule du décalage en temps pour la transformée de Fourier, on a

$$\widehat{e^{-|t-1|}} = e^{-2i\pi\xi}\widehat{e^{-|t|}} = \frac{2e^{-2i\pi\xi}}{1+4\pi^2\xi^2} \quad \text{et} \quad \widehat{e^{-|t+1|}} = e^{2i\pi\xi}\widehat{e^{-|t|}} = \frac{2e^{2i\pi\xi}}{1+4\pi^2\xi^2} \quad \text{d'où} \quad \widehat{e^{-|t-1|} + e^{-|t+1|}} = \frac{4\cos(2\pi\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

4. On a $\widehat{te^{-t^2/2}} = \dfrac{1}{-2\pi i}\widehat{e^{-t^2/2}}'(\xi)$. Or $\widehat{e^{-t^2/2}} = \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\xi^2}$ et donc $\widehat{e^{-t^2/2}}' = -4\pi^2\xi\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\xi^2}$.
Finalement $\widehat{te^{-t^2/2}} = -i(2\pi)^{3/2}\xi\, e^{-2\pi^2\xi^2}$.

5. D'après les hypothèses, il est possible de prendre la transformation de Fourier de l'égalité $-f''(x) + f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ ce qui donne $-\widehat{f''} + \widehat{f} = (-(2\pi i\xi)^2 + 1)\widehat{f} = (1+4\pi^2\xi^2)\widehat{f} = \widehat{\mathbf{1}_{[-1,1]}} = 2\,\mathrm{sinc}(2\pi\xi)$ d'où $\widehat{f} = \dfrac{2\,\mathrm{sinc}(2\pi\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$.

6. On a $\widehat{f} = \dfrac{1}{1+4\pi^2\xi^2}\,2\,\mathrm{sinc}(2\pi\xi) = \widehat{\dfrac{1}{2}e^{-|x|}}\,\widehat{\mathbf{1}_{[-1,1]}} = \dfrac{1}{2}\widehat{e^{-|x|} * \mathbf{1}_{[-1,1]}}$ d'où $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|} * \mathbf{1}_{[-1,1]}$.

7. On remarque que, comme $e^{-|x|} > 0$ et $\mathbf{1}_{[-1,1]} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, alors $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. Le cas 1 ($f \equiv 0$) n'est donc pas possible, le cas 2 non plus (car la fonction est identiquement nulle en dehors d'un segment du type $[-a,a]$), les cas 4,5,6 non plus (car f est négative par endroits). Il reste donc le cas 3 qui est une "régularisation continue" du créneau $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}$.
Remarque : on pouvait aussi calculer et on trouve

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} * \mathbf{1}_{[-1,1]} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(y)e^{-|x-y|}dy = \int_{-1}^{1} e^{-|x-y|}dy = \int_{-1-x}^{1-x} e^{-|t|}dt = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}(e^1 - e^{-1}) & x \leq -1, \\ 1 - \frac{e^{-1}}{2}(e^x + e^{-x}) & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}e^{-x}(e^1 - e^{-1}) & 1 \leq x. \end{cases}$$

8. On a $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{(z-i/2)(z+i/2)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-i/2, i/2\})$, f a donc 2 pôles d'ordre 1 en $-i/2$ et $i/2$ et seul $i/2$ est dans le compact à bord Δ de frontière $\partial\Delta = \gamma$. Donc $I = \displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\,\text{Rés}(f, \frac{i}{2}) = 2\pi i\ (z - \frac{i}{2})f(z)\Big|_{z=i/2} = 2\pi\, e^{-1/4}$. Comme la "fonction corrigée" $(z - \frac{i}{2})f(z)$ est holomorphe dans Δ, on a $J = \displaystyle\int_\gamma (z - \frac{i}{2})f(z)dz = 0$ par le théorème de Cauchy.

9. On a :

$$\frac{z}{z+i} = 1 - \frac{i}{z+i} = 1 - \frac{i}{1+i}\frac{1}{1+\frac{z-1}{1+i}} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{(1+i)^{n+1}}(z-1)^n = 1 - \frac{i}{1+i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} i}{(1+i)^{n+1}}(z-1)^n = \frac{1}{1+i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} i}{(1+i)^{n+1}}(z-1)^n.$$

10. $R = \sqrt{2}$. Cela se voit directement sur la série entière ou en remarquant que $\frac{z}{z+i} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-i\})$ et que $|1 - (-i)| = \sqrt{2}$.

11 et 12. En posant $f(z) = e^{iz}R(z)$ avec $R(z) = \frac{1}{(z-\sqrt{2}i)(z+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{3}i)(z+\sqrt{3}i)}$ qui est une fraction rationnelle de degré -4 sans pôles réels, on a d'après le cours et la formule des résidus,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it}}{(t^2+2)(t^2+3)}dt &= 2\pi i \sum_{\text{pôles } a \text{ avec } \mathrm{Im}(a) > 0} \text{Rés}(f,a) = 2\pi i(\text{Rés}(f, \sqrt{2}i) + \text{Rés}(f, \sqrt{3}i)) \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}i(3-2)} + \frac{e^{-\sqrt{3}}}{(-3+2)2\sqrt{3}i} \right) = \pi \left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

L'intégrale de la question 11 est la partie réelle de cette quantité, c'est-à-dire elle même car la quantité est réelle. L'intégrale de la question 12 est la partie imaginaire de la quantité donc est nulle (on pouvait le voir directement car on intègre sur $\mathbb{R}$ une fonction impaire).