Année universitaire 2019-2020
Tronc Commun 3ème année

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Jeudi 7 novembre 2019 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Seuls documents permis : les notes de cours et de TD personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD et le polycopié de rappel. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\dfrac{t^3+\cos t}{t^4+t+1} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{t^2}{\operatorname{ch} t} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\sin t}{t} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{t}+t^4} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$

☐ $\dfrac{t^3+\cos t}{t^4+t+1} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{t^2}{\operatorname{ch} t} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\sin t}{t} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{t}+t^4} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-4t}dt$ quand $n \to +\infty$?

☐ n'existe pas ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{4}$ ☐ $-\frac{1}{3}$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $-\infty$

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $+\infty$

3. En faisant un changement en polaires, on trouve que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|y|}{x^2+y^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ vaut

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ☐ $\sqrt{\pi}$ ☐ π ☐ $2\sqrt{\pi}$ ☐ 2π ☐ $+\infty$

4. Pour $n \geq 1$ et $x \in]0,+\infty[$, on définit $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dt}{(t^2+x^2)^n}$. Alors $I_n'(x)$ vaut

☐ n'existe pas ☐ $-2nxI_{n-1}(x)$ ☐ $-2nxI_{n+1}(x)$ ☐ $-2nI_{n+1}(x)$

☐ 0 ☐ $2nxI_{n-1}(x)$ ☐ $2nxI_{n+1}(x)$ ☐ $2nI_{n+1}(x)$

5. La transformée de Fourier de $H(t)te^{-t}$ vaut

☐ n'existe pas ☐ $\dfrac{1}{1+2i\pi\xi}$ ☐ $\dfrac{1}{(1+2i\pi\xi)^2}$ ☐ $\dfrac{1}{(1-2i\pi\xi)^2}$

☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{1-2i\pi\xi}$ ☐ $\dfrac{-1}{(-1+2i\pi\xi)^2}$ ☐ $\dfrac{4i\pi\xi}{(1+2i\pi\xi)^2}$

6. Soient deux fonctions $y, f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ avec y deux fois dérivable et $y', y'' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On suppose que $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t)$ pour tous $t \in \mathbb{R}$. Alors $\hat{y}(\xi)$ vaut

☐ 0 ☐ $\hat{f}(\xi)$ ☐ $\dfrac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{\hat{f}(\xi)}{(1+2i\pi\xi)^2}$ ☐ $\dfrac{\hat{f}(\xi)}{(-1+2i\pi\xi)^2}$ ☐ $\dfrac{\hat{f}(\xi)}{(i+2\pi\xi)^2}$

7. Supposons que dans la question 6, on ait $f(t) = H(t)e^{-t}$. Dans ce cas, $y(t)$ vaut

☐ 0 ☐ $H(t)\frac{t^2}{2}e^{-t}$ ☐ $\frac{t^2}{2}e^{-t}$ ☐ $H(t)e^{-t} * H(t)te^{-t}$ ☐ $H(t)e^{-t} * H(t)e^{-t}$

☐ $H(t)\frac{t^3}{6}e^{-t}$ ☐ $H(-t)\frac{t^2}{2}e^{t}$ ☐ $\frac{t^2}{2}e^{t}$ ☐ $H(t)e^{-t} * H(t)\frac{t^2}{2}e^{-t}$ ☐ $H(-t)e^{t} * H(-t)e^{t}$

(Attention, plusieurs réponses peuvent être possibles.)

Analyse complexe

8. La fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^2}$

- ☐ n'est holomorphe nulle part
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$
- ☐ a une singularité éliminable
- ☐ a une singularité essentielle
- ☐ a un pôle d'ordre 1
- ☐ a un pôle d'ordre 2.

9. Le développement en série entière au voisinage de $z = 0$ de la fonction f de la question 8 est :

- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{i^n} z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}(n+1)}{i^n} z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{i^n} z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{i^{n+1}} z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{i^n} (z-i)^n$
- ☐ il n'existe pas

10. Le rayon de convergence R de la série entière obtenue dans la question 9 est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 3 ☐ i ☐ $+\infty$.

11. Soit l'intégrale $\displaystyle\int_{C(0,R+1)^+} \frac{\cos z}{z^5} dz$ où $C(0, R+1)^+$ est le cercle de centre 0 et de rayon $R+1$ parcouru dans le sens trigonométrique, avec R qui est le dernier chiffre de votre numéro de portable (9 si vous n'avez pas de portable), à préciser dans la case ☐. L'intégrale vaut :

☐ 0 ☐ $2\pi i$ ☐ $-\dfrac{2\pi i}{2!}$ ☐ $\dfrac{2\pi i}{4!}$ ☐ $-\dfrac{2\pi i}{6!}$ ☐ $\dfrac{2\pi i}{8!}$ ☐ $-\dfrac{2\pi i}{10!}$ ☐ n'existe pas

12. Combien vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+3} dx$?

- ☐ 0
- ☐ $2\pi i$
- ☐ $\dfrac{\pi e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}(\cos 1 + i \sin 1)$
- ☐ n'est pas définie
- ☐ $\dfrac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}(\cos 1 + i \sin 1)$
- ☐ $\dfrac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}(\cos 1 - i \sin 1)$

Correction du DS de novembre 2019 "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. La fonction $t \in [0,+\infty[\mapsto \dfrac{t^3+\cos t}{t^4+t+1}$ est continue et $\left|\dfrac{t^3+\cos t}{t^4+t+1}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc la fonction n'appartient pas à $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$. Mais $\left|\dfrac{t^3+\cos t}{t^4+t+1}\right|^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc la fonction appartient à $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$.

La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{t^2}{\operatorname{ch} t}$ est continue et positive. Comme $\left|\dfrac{t^2}{\operatorname{ch} t}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2t^2}{e^t}$ et $\left|\dfrac{t^2}{\operatorname{ch} t}\right| \underset{t\to-\infty}{\sim} \dfrac{2t^2}{e^{-t}}$, par croissances comparées, la fonction appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. De même, $\left|\dfrac{t^2}{\operatorname{ch} t}\right|^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{4t^4}{e^{2t}}$ et $\left|\dfrac{t^2}{\operatorname{ch} t}\right| \underset{t\to-\infty}{\sim} \dfrac{4t^4}{e^{-2t}}$ donc la fonction appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

La fonction sinus cardinal, $\dfrac{\sin t}{t}$, est continue sur $\mathbb{R}$ mais comme vu en TD, elle n'appartient pas à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et elle appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ (cette dernière propriété étant facile à voir car $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right|^2 \leq \dfrac{1}{t^2}$ pour $|t| \geq 1$).

La fonction $t \in]0,+\infty[\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+t^4}$ est continue et positive. Comme $\left|\dfrac{1}{\sqrt{t}+t^4}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\left|\dfrac{1}{\sqrt{t}+t^4}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4}$, elle appartient à $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$. Comme $\left|\dfrac{1}{\sqrt{t}+t^4}\right|^2 \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$, elle ne peut pas appartenir à $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$.

2. Cette question a été traitée en TD : la fonction $f_n(t) := \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n e^{-4t} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-3t}$ et $|f_n(t)| \leq e^{-3t} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ (car $\ln(1+\frac{t}{n}) \leq \frac{t}{n}$). Donc, par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3t}dt = \frac{1}{3}$.

3. Par un changement de variables en coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on a
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|y|}{x^2+y^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{+\infty} e^{-r^2}dr \int_0^{2\pi} |\sin\theta| d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times 2\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 2\sqrt{\pi}$.

4. L'intégrande $h_n(x,t) = \dfrac{1}{(t^2+x^2)^n}$ est définie et continue sur $[\epsilon, A]\times[0,+\infty[$ pour tous $0 < \epsilon < A$. La fonction h_n est intégrable en t car, pour $n \geq 1$, $|h_n(x,t)| \leq \dfrac{1}{(t^2+\epsilon^2)} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$. De plus, $\dfrac{\partial h_n}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}$ existe pour tout $(x,t) \in [\epsilon, A] \times [0,+\infty[$ et est dominée : $\left|\dfrac{\partial h_n}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{2nA}{(t^2+\epsilon^2)^{n+1}} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ Par le théorème de dérivation sous le signe intégral (dont nous venons de vérifier les hypothèses), on obtient que I_n est dérivable sur $[\epsilon, A]$ et $I_n'(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\partial h_n}{\partial x} dt = -2nxI_{n+1}(x)$. Ceci est valable pour tout $x \in [\epsilon, A]$ et donc sur $]0,+\infty[$ car ϵ et A sont arbitraires.

5. D'après le tableau, on obtient $\mathcal{F}\left(H(t)te^{-t}\right)(\xi) = \dfrac{1}{(1+2i\pi\xi)^2}$.

6. D'après les hypothèses, il est possible de prendre la transformation de Fourier de l'égalité $y''(t)+2y'(t)+y(t) = f(t)$ pour obtenir $\widehat{y''}(\xi) + \widehat{2y'}(\xi) + \hat{y}(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Comme $\widehat{y''}(\xi) = (2i\pi\xi)^2\hat{y}(\xi)$ et $\widehat{y'}(\xi) = (2i\pi\xi)\hat{y}(\xi)$, on obtient $(2i\pi\xi+1)^2\hat{y}(\xi) = \hat{f}(\xi)$; il fallait donc cocher la 4ème case.

7. Si $f(t) = H(t)e^{-t}$ alors $\hat{f}(\xi) = 1/(1+2i\pi\xi)$ donc d'après la question 6, $\hat{y}(\xi) = 1/(2i\pi\xi+1)^3$. Par injectivité de la transformation de Fourier (ou inversion), on obtient $y(t) = H(t)t^2e^{-t}/2$. On pouvait aussi remarquer que, d'après la question 5, $\mathcal{F}(y)(\xi) = \mathcal{F}\left(H(t)e^{-t}\right)(\xi)\mathcal{F}\left(H(t)te^{-t}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(H(t)e^{-t} * H(t)te^{-t}\right)(\xi)$ donc par injectivité de la transformation de Fourier, on obtient $y(t) = H(t)e^{-t} * H(t)te^{-t}$. Il fallait donc cocher les cases 2 et 4.

8. La fonction f est une fraction rationnelle avec un unique pôle en $z = -i$ qui est d'ordre 2. En particulier f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Il y avait donc 2 cases à cocher.

9. On peut par exemple développer en série entière $g(z) = \dfrac{1}{i+z}$ au voisinage de 0 et dériver ensuite. On a $g(z) = \dfrac{1}{i}\dfrac{1}{1+z/i} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{i^{n+1}} z^n$, puis $g'(z) = -f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{i^{n+1}} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{i^{n+2}} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{i^n} z^n$. On obtient $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{i^n} z^n$.

10. $R = 1$: se voit sur le développement ci-dessus ou géométriquement en calculant la distance de 0 au pôle $-i$.

11. $g(z) = \dfrac{\cos z}{z^5}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et 0 est un pôle d'ordre 5. Pour tout $R \geq 0$ (donc quel que soit le chiffre du numéro de portable), $C(0,R+1)^+$ est le bord du compact à bord $\overline{D}(0,R+1)$ qui contient 0 dans son intérieur. D'où $\displaystyle\int_{C(0,R+1)^+} \frac{\cos z}{z^5} dz = 2\pi i \operatorname{Rés}(g,0)$. Mais $z^5 g(z) = \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \cdots$ donc $\operatorname{Rés}(g,0) = \frac{1}{4!}$. Finalement $\displaystyle\int_{C(0,R+1)^+} \frac{\cos z}{z^5} dz = \frac{2\pi i}{4!}$.

12. L'intégrale $\mathcal{I}$ demandée est de type 2 avec une fraction rationnelle sans pôle réel et de degré inférieur ou égal à -2 (cf. cours). On pose $R(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+2z+3} = \dfrac{e^{iz}}{(z+1-i\sqrt{2})(z+1+i\sqrt{2})}$. On a donc $\mathcal{I} = 2\pi i \operatorname{Rés}(R, -1+i\sqrt{2}) = \dfrac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}(\cos 1 - i\sin 1)$.