Année universitaire 2021-2022
Tronc Commun 3ème année

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Jeudi 4 novembre 2021 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes personnelles manuscrites,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel du module.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\dfrac{1}{t^{1/4}+t} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ ☐ $t^5\cos(t)e^{-t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\sin(t^2)}{t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$

☐ $\dfrac{1}{t^{1/4}+t} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ ☐ $t^5\cos(t)e^{-t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\sin(t^2)}{t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^n+e^{2t}}$ quand $n \to +\infty$?

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $1-e^{-1}$ ☐ $1-e^{-2}$ ☐ $e^{-2}-1$ ☐ $\dfrac{1-e^{-2}}{2}$ ☐ $\dfrac{e^{-2}-1}{2}$ ☐ $+\infty$

3. En faisant un changement en polaires, on trouve que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^2}{x^2+y^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ vaut

☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ☐ $\sqrt{\pi}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ 2π ☐ $+\infty$

4. On considère $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$. Alors

☐ $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t} e^{-t} dt$ ☐ $F'(x)$ n'existe pas ☐ $F'(x) = \dfrac{1}{i(x-1)}$ ☐ $F(x) = \dfrac{1}{i}\ln(x-1)$

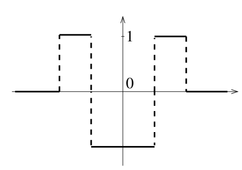
☐ $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt$ ☐ $F'(x) = 0$ ☐ $F'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ ☐ $F(x) = -\arctan(x)$

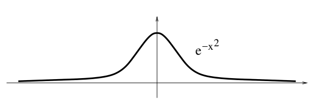
☐ $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt$ ☐ $F'(x) = \dfrac{1+ix}{1+x^2}$ ☐ $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ☐ $F(x) = \arctan(x)$

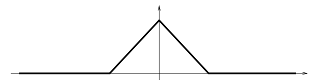
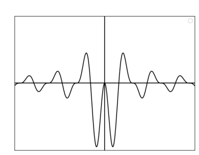
5. La transformée de Fourier de $e^{-\pi(t-4)^2}$ vaut

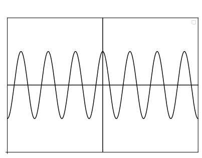
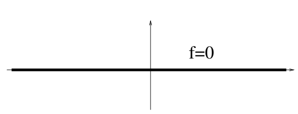
☐ n'existe pas ☐ $e^{-\pi(\xi-4)^2}$ ☐ $e^{-\pi(\xi+4)^2}$ ☐ $e^{-\pi(8i\xi+\xi^2)}$

☐ $e^{-\pi(4i\xi+\xi^2)}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-\pi^2(\xi-4)^2}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-\pi(8i\xi-\xi^2)}$ ☐ $e^{\pi(6i\xi-\xi^2)}$

6. Donner l'allure de la transformée de Fourier du signal 

☐ 

☐ 
☐ 

☐ 
☐ 

☐ Elle n'existe pas

7. En utilisant la formule $\widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1\hat{f}_2$, le calcul de $\dfrac{1}{1+x^2} * \dfrac{1}{1+x^2}$ donne

☐ 0 ☐ $\pi^2 e^{-4\pi|x|}$ ☐ $\dfrac{2\pi}{1+x^2}$ ☐ $\dfrac{1}{1+x^2}$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$ ☐ $\dfrac{2\pi}{4+x^2}$ ☐ $\dfrac{1}{4+x^2}$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{4+x^2}$

Analyse complexe

8. Soit $f(z) = \dfrac{1}{(z+3i)^2}$. On a :

- ☐ f n'est holomorphe nulle part
- ☐ f est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-3i\}$
- ☐ f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{3i\}$
- ☐ f admet un pôle d'ordre 1 en $3i$
- ☐ f admet un pôle d'ordre 1 en $-3i$
- ☐ f admet un pôle d'ordre 2 en $3i$
- ☐ f admet un pôle d'ordre 2 en $-3i$
- ☐ $\displaystyle\int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 0.$
- ☐ $\displaystyle\int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 2\pi i.$

9. Le développement en série entière *au voisinage de* 1 de la fonction f de la question 8 est :

- ☐ il n'existe pas
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(3i)^{n+2}} z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(1+3i)^{n+2}} (z-1)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(1+3i)^{n+2}} (z-1)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(1+3i)^{n+2}} (z-1)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z+3i)^n.$

10. Le rayon de convergence de la série entière obtenue dans la question 9 est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\sqrt{3}$ ☐ 2 ☐ $\sqrt{10}$ ☐ 4 ☐ $+\infty$.

11. Combien vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\pi x}}{x^2+4} dx$?

- ☐ 0
- ☐ π
- ☐ $2\pi i$
- ☐ $\dfrac{\pi}{2}e^{2\pi}$
- ☐ $\dfrac{\pi}{2}e^{-2\pi}$
- ☐ n'est pas définie
- ☐ $\dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $\pi e^{-2\pi}$
- ☐ $\pi e^{2\pi}$
- ☐ $-\dfrac{i}{4}e^{-2\pi}$

Correction du DS de novembre 2021 "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $\frac{1}{t^{1/4}+t}$ présente des problèmes d'intégrabilité en 0 et en $+\infty$. En 0, $\left|\dfrac{1}{t^{1/4}+t}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1/4}}$ donc la fonction est intégrable et de carré intégrable car $\frac{1}{t^{1/4}}$ et $\left(\frac{1}{t^{1/4}}\right)^2 = \frac{1}{t^{1/2}}$ sont intégrables en 0. En $+\infty$, $\left|\dfrac{1}{t^{1/4}+t}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc la fonction n'est pas intégrable mais est de carré intégrable. Finalement $\frac{1}{t^{1/4}+t}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ mais est dans $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$.
$t^5\cos(t)e^{-t^2}$ est continu sur $\mathbb{R}$. L'intégrabilité s'étudie de la même manière en $\pm\infty$ (la fonction est impaire). Par croissances comparées, $|t^k\cos(t)e^{-t^2}| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $k>0$, d'où $|t^5\cos(t)e^{-t^2}| \le t^{-2}$ pour $t \ge A$ où A est assez grand, donc $t^5\cos(t)e^{-t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
La fonction $\frac{\sin(t^2)}{t^2}$, est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. Par parité, on peut se limiter à étudier l'intégrabilité en 0 et en $+\infty$. Comme $\dfrac{\sin(t^2)}{t^2} \underset{t\to 0}{\to} 1$, on peut prolonger la fonction par continuité en 0 et elle est donc intégrable et de carré intégrable en 0. Pour $t \ge 1$, $\left|\frac{\sin(t^2)}{t^2}\right| \le \frac{1}{t^2}$. Comme $\frac{1}{t^2} \in \mathrm{L}^1(]1,+\infty[) \cap \mathrm{L}^2(]1,+\infty[)$, on en déduit, par comparaison, que la fonction est intégrable et de carré intégrable en $+\infty$. Finalement $\frac{\sin(t^2)}{t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
La fonction $t \in]0,+\infty[\mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et il y a un problème d'intégrabilité en 0 et en $+\infty$. Comme $\left|\dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $\dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$ mais $\dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \notin \mathrm{L}^2(]0,1[)$. Donc, même si par ailleurs la fonction est intégrable et de carré intégrable en $+\infty$ (car elle est équivalente à $\frac{\ln t}{t^{3/2}}$), on en déduit que $\dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$ est dans $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ mais pas dans $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$.

2. $f_n(t) = \dfrac{1}{t^n+e^{2t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et, quand $n\to+\infty$, $f_n(t)$ tend vers e^{-2t} sur $[0,1]$ et vers 0 sur $[1,+\infty[$, presque partout. D'autre part, on a une hypothèse de domination : pour tout $t \ge 0$, $|f_n(t)| \le e^{-2t} \in \mathrm{L}^1([0,+\infty[)$. Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers $\displaystyle\int_0^1 e^{-2t}dt + \int_1^{+\infty} 0\,dt = \frac{1-e^{-2}}{2}$.

3. Par un changement de variables en coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^2}{x^2+y^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

4. L'intégrale proposée est une intégrale à paramètre $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ avec $f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale (exercice : les hypothèses sont satisfaites pour tout $x \in \mathbb{R}$), on obtient $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}dt$ (1ère case à cocher). Cette intégrale se calcule en remarquant que c'est la partie réelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}dt = \left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$, d'où $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (2ème case à cocher). Enfin, de façon évidente, on en déduit que $F(x) = \arctan(x)$, en remarquant que la constante d'intégration est 0 car $F(0)=0$ (3ème case à cocher).

5. Il suffit d'appliquer la formule de décalage en temps du cours à la transformée de Fourier de la gaussienne (donnée par le tableau pour $a=\pi$). On trouve $\widehat{e^{-\pi(t-4)^2}} = e^{-\pi(8i\xi+\xi^2)}$.

6. Le signal proposé est une différence de créneaux centrés du type $\mathbf{1}_{[-2a,2a]} - 2\,\mathbf{1}_{[-a,a]}$. Comme la transformée de Fourier d'un créneau centré est un sinus cardinal, par linéarité de la transformée de Fourier, le résultat sera une différence de sinus cardinaux (qui ne peut pas être 0, par injectivité de la transformation de Fourier, car le signal de départ n'est pas nul). De façon évidente, une seule courbe convient.

7. Dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a $\widehat{\frac{1}{1+x^2} * \frac{1}{1+x^2}}(\xi) = \left(\widehat{\frac{1}{1+x^2}}\right)^2(\xi) = (\pi e^{-2\pi|\xi|})^2 = \pi^2 e^{-4\pi|\xi|}$, en calculant $\widehat{\frac{1}{1+x^2}}$ par inversion à l'aide du tableau. Par inversion, il suit $(\frac{1}{1+x^2} * \frac{1}{1+x^2})(-x) = \pi^2\widehat{e^{-4\pi|\xi|}}(x) = \frac{2\pi}{4+x^2}$ en utilisant encore le tableau. Finalement $\frac{1}{1+x^2} * \frac{1}{1+x^2} = \frac{2\pi}{4+(-x)^2} = \frac{2\pi}{4+x^2}$.

8. La fonction f est une fraction rationnelle avec un pôle d'ordre 2 en $-3i$. Elle est donc holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}\setminus\{-3i\}$. En particulier, le disque fermé $\overline{D}(0,1)$ de centre 0 et de rayon 1 est un compact à bord inclus dans $\mathbb{C}\setminus\{-3i\}$; par le théorème de Cauchy, $\int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 0$. Il y avait donc 3 cases à cocher.

9. f étant holomorphe en 1, elle est développable en série entière au voisinage de 1. On remarque que $f(z) = -((z+3i)^{-1})'$. On commence donc par développer en série entière $(z+3i)^{-1}$ en $z=1$ et ensuite on dérivera le résultat obtenu.

$$\frac{1}{3i+z} = \frac{1}{1+3i+(z-1)} = \frac{1}{1+3i}\frac{1}{1+\frac{z-1}{1+3i}} = \frac{1}{1+3i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+3i)^n}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+3i)^{n+1}}(z-1)^n.$$

D'où $f(z) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(1+3i)^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(1+3i)^{n+2}}(z-1)^n$.

10. Le rayon de convergence R sera le rayon du plus grand disque ouvert de centre 1 inclus dans $\mathbb{C}\backslash\{-3i\}$, soit $R = |1-(-3i)| = \sqrt{10}$ (distance de 1 à $-3i$). On pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert avec le développement obtenu dans la question précédente ($\sum a_n(z-1)^n$ avec $a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{(1+3i)^{n+2}}$).

11. L'intégrale demandée est du type 2 du cours avec une fraction rationnelle sans pôle réel et de degré inférieur ou égal à -2. On pose $R(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{z^2+4} = \dfrac{e^{i\pi z}}{(z-2i)(z+2i)}$ qui a deux pôles $-2i$ et $2i$ d'ordre 1 mais seul $2i$ est au-dessus de l'axe des abscisses. On a donc que l'intégrale vaut $2\pi i \,\mathrm{Rés}(R, 2i) = 2\pi i \; (z-2i)\dfrac{e^{i\pi z}}{(z-2i)(z+2i)}\Big|_{z=2i} = \dfrac{\pi}{2}e^{-2\pi}$. On pouvait aussi utiliser les transformées de Fourier en remarquant que l'intégrale vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i(-\frac{1}{2})x}}{x^2+4}dx = \mathcal{F}(\frac{1}{x^2+4})(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}e^{-4\pi(-\frac{1}{2})}$ en utilisant le tableau.