Année universitaire 2022-2023
Tronc Commun 3ème année

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Jeudi 27 octobre 2022 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes personnelles manuscrites,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel du module.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\dfrac{1}{t+\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ ☐ $\ln(t) \in \mathrm{L}^1(]0,1])$ ☐ $\dfrac{e^t-1}{t^{3/2}} \in \mathrm{L}^1(]0,1])$ ☐ $\dfrac{\ln(t)}{t+e^{-t}} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[)$

☐ $\dfrac{1}{t+\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ ☐ $\ln(t) \in \mathrm{L}^2(]0,1])$ ☐ $\dfrac{e^t-1}{t^{3/2}} \in \mathrm{L}^2(]0,1])$ ☐ $\dfrac{\ln(t)}{t+e^{-t}} \in \mathrm{L}^2([1,+\infty[)$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(\sin x)^n + e^x}}$ quand $n \to +\infty$?

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\dfrac{1}{e}$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ☐ $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ ☐ $-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ ☐ $-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ☐ $2\sqrt{e}$ ☐ $+\infty$

3. Pour $t > 0$, on considère $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}dx$. Alors

☐ $f'(t)$ n'existe pas ☐ $f'(t) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx$ ☐ $f'(t) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}e^{-tx^2}dx$

☐ $f'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}e^{-tx^2}dx$ ☐ $f'(t) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2xt}{1+x^2}e^{-tx^2}dx$ ☐ $f(t) - f'(t)$ n'existe pas

☐ $f(t) - f'(t) = 0$ ☐ $f(t) - f'(t) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}$ ☐ $f(t) - f'(t) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$

☐ $f(t) - f'(t) = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}$ ☐ $f(t) - f'(t) = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$ ☐ $f(t) - f'(t) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{t}$

4. En faisant un changement en polaires, on trouve que $\displaystyle\iint_{[0,\infty[\times[0,\infty[} \frac{x}{x^2+y^2}e^{-2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ vaut

☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ $+\infty$

5. Soit $f(t) = \mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin t}{t}$. En utilisant la transformée de Fourier, on calcule que $f * f(t)$ vaut

☐ n'existe pas ☐ $f(t)$ ☐ $-\pi f(t)$ ☐ $\pi f(t)$ ☐ $\pi^2 f(t)$

☐ 0 ☐ $-\pi^2 f(t)$ ☐ $\pi\hat{f}(t)$ ☐ $\pi(\hat{f}(t))^2$ ☐ $\pi\widehat{f^2}(t)$

6. À l'aide de la formule de Plancherel, on trouve que la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ est

☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{\pi}$ ☐ 1 ☐ $\dfrac{\pi}{4}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ 2π ☐ $+\infty$

7. En remarquant que $f(x) = \dfrac{-2x}{\pi(1+x^2)^2}$ est la dérivée d'une fonction qui apparaît dans le tableau des transformées de Fourier, $\hat{f}(\xi)$ vaut

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $-2i\pi\xi e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $2i\pi\xi e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $-2i\pi\xi^2 e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $2i\xi e^{-|\xi|}$

Analyse complexe

8. On définit le logarithme complexe principal $\operatorname{Log}(z)$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. Soit $f(z)=\dfrac{\operatorname{Log}(1+z)}{z(z-2)}$.

Le domaine d'holomorphie de f est exactement :

☐ $\emptyset$ ☐ $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ ☐ $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}^-\cup\{2\})$ ☐ $\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1]$
☐ $\mathbb{C}$ ☐ $\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup\{0\})$ ☐ $\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup\{2\})$ ☐ $\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup\{0\}\cup\{2\})$

Le point $z=0$ est ☐ une singularité éliminable ☐ un pôle d'ordre 1
☐ un pôle d'ordre 2 ☐ une singularité essentielle

Le point $z=2$ est ☐ une singularité éliminable ☐ un pôle d'ordre 1
☐ un pôle d'ordre 2 ☐ une singularité essentielle

$f(0)=$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ -1 ☐ $+\infty$ ☐ n'existe pas

$f(-i)=$ ☐ 0 ☐ $-\frac{\ln 2}{10}-i\frac{\ln 2}{5}$ ☐ $-\frac{\pi+\ln 2}{10}+i\frac{\pi-4\ln 2}{20}$ ☐ $\frac{7\pi-\ln 2}{10}-i\frac{7\pi-4\ln 2}{20}$ ☐ n'existe pas

$\displaystyle\int_{C(0,\frac{1}{2})^+} f(z)dz=$ ☐ 0 ☐ $2\pi i$ ☐ $-2\pi i$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ n'existe pas

$\displaystyle\int_{C(2,1)^+} f(z)dz=$ ☐ 0 ☐ $2\pi i$ ☐ $\ln 3$ ☐ $\frac{\ln 3}{2}$ ☐ $\pi i\ln 3$ ☐ n'existe pas

9. Le développement en série entière de $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}$ en $z=0$ est :

☐ il n'existe pas ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{4^{n+1}}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}z^{2n+1}$

☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^{2n}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^{2n+1}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}z^n$.

Le rayon de convergence est ☐ 0 ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ 4 ☐ $+\infty$
☐ n'existe pas

10. Combien vaut $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta}$?

☐ 0 ☐ π ☐ $2\pi i$ ☐ $\frac{2\pi i}{\sqrt{5}}$ ☐ $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$
☐ n'est pas définie ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ $-\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Correction du DS d'octobre 2022 "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $\frac{1}{t+\sqrt{t}}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ car $\left|\dfrac{1}{t+\sqrt{t}}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$.
$\frac{1}{t+\sqrt{t}}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ car $\left|\dfrac{1}{t+\sqrt{t}}\right|^2 \underset{t\to0}{\sim} \left|\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right|^2 = \dfrac{1}{t}$ qui n'est pas intégrable en 0.
$\ln(t)$ est dans $\mathrm{L}^1(]0,1])$. Cela se voit par un calcul direct en utilisant que la primitive de $\ln t$ est (à une constante près) $t\ln t - t$. On a $\int_0^1 |\ln t| dt = -\int_0^1 \ln t\, dt = [-t\ln t + t]_0^1 = 1 < +\infty$.
$\ln(t)$ est dans $\mathrm{L}^2(]0,1])$. Pour le voir, on fait une intégration par partie en utilisant la primitive de ln : $\int_0^1 |\ln t|^2 dt = [t\ln^2 t - t\ln t]_0^1 - \int_0^1 (\ln t - 1)dt = 2 < +\infty$.
$\frac{e^t-1}{t^{3/2}}$ est dans $\mathrm{L}^1(]0,1])$. Le seul problème d'intégrabilité est en 0 et on a $\left|\dfrac{e^t-1}{t^{3/2}}\right| \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{t}{t^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable en 0.
$\frac{e^t-1}{t^{3/2}}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^2(]0,1])$ car $\left|\dfrac{e^t-1}{t^{3/2}}\right|^2 \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ qui n'est pas intégrable en 0.
$\frac{\ln(t)}{t+e^{-t}}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^1([1,+\infty[)$ car $\left|\dfrac{\ln(t)}{t+e^{-t}}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t}$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$ car $\frac{\ln(t)}{t} \geq \frac{1}{t}$ pour $t \geq 1$.
$\frac{\ln(t)}{t+e^{-t}}$ est dans $\mathrm{L}^2([1,+\infty[)$ car $\left|\dfrac{\ln(t)}{t+e^{-t}}\right|^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(t)}{t^2}$ et $\frac{\ln^2(t)}{t^2} = \frac{\ln^2(t)}{t^{1/2}}\frac{1}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$ pour t assez grand par croissances comparées. Comme $\frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$, la conclusion suit.

2. On a $f_n(x) := \dfrac{1}{\sqrt{(\sin x)^n + e^x}} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-x/2}$ p.p. sur $[1,+\infty[$. De plus, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ pour $x \geq 1$ et $\frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x/2} \in L^1([1,+\infty[)$ donc $\frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \in L^1([1,+\infty[)$ et l'hypothèse de domination est satisfaite. Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x/2}dx = \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3. L'intégrale proposée est une intégrale à paramètre $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t,x)dx$ avec $g(t,x) = \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale (exercice : les hypothèses sont satisfaites pour $t \in]0,+\infty[$), on obtient $f'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(t,x)dt = \int_0^{+\infty} \frac{-x^2}{1+x^2}e^{-tx^2}dx$ (une 1ère case à cocher). Il suit $f(t) - f'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx$ et cette intégrale se calcule aisément par un changement de variable $u = \sqrt{t}x$ pour obtenir $f(t) - f'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$ (une 2ème case à cocher).

4. Par un changement de variables en coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on a
$$\iint_{[0,\infty[\times[0,\infty[} \frac{x}{x^2+y^2}e^{-2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta \int_0^{+\infty} e^{-2r}dr = [\sin\theta]_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2r}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

5. D'après les transformées de Fourier usuelles, on a $\hat{f}(\xi) = \widehat{\mathrm{sinc}}(\xi) = \pi\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(\xi)$. Il suit $\widehat{f*f}(\xi) = (\hat{f}(\xi))^2 = \left(\pi\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(\xi)\right)^2 = \pi^2\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(\xi)$. Puis en utilisant l'inversion, on obtient $\widehat{\widehat{f*f}}(\xi) = f*f(-\xi) = \pi^2\widehat{\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}}(\xi) = \pi\mathrm{sinc}(\xi)$. Par parité de la fonction sinus cardinal, on arrive finalement à $f*f(\xi) = \pi\mathrm{sinc}(\xi) = \pi f(\xi)$.

6. Par la formule de Plancherel, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{sinc}(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathrm{sinc}}(\xi)|^2d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\pi\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(\xi)|^2d\xi = \pi^2\int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} d\xi = \pi$.

7. On remarque que $\dfrac{-2x}{\pi(1+x^2)^2} = \left(\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}\right)'$. Par la formule de la transformée de Fourier de la dérivée, on obtient $\widehat{\dfrac{-2x}{\pi(1+x^2)^2}} = 2i\pi\xi\dfrac{1}{\pi}\widehat{\dfrac{1}{1+x^2}}$. Par inversion de Fourier, on lit sur le tableau (ligne 4 avec $a = 2\pi$), $\dfrac{1}{\pi}\widehat{\dfrac{1}{1+x^2}} = e^{-2\pi|\xi|}$. Finalement $\widehat{\dfrac{-2x}{\pi(1+x^2)^2}} = 2i\pi\xi e^{-2\pi|\xi|}$.

8. $\mathrm{Log}(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-)$ donc $\mathrm{Log}(1+z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1])$. La fonction $z(z-2)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'annule en 0 et 2 donc a priori f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de $]-\infty,-1] \cup \{0\} \cup \{2\}$. Mais $\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z(z-2)} \underset{z\to0}{\sim} \frac{z}{z(z-2)} \underset{z\to0}{\to} -\frac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en $z = 0$ en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$ et 0 est une singularité éliminable. D'autre part $(z-2)f(z) = \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z} \underset{z\to2}{\to} \frac{1}{2}\ln 3 \neq 0$ donc 2 est un pôle d'ordre 1 de f. Finalement $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup\{2\}))$ et 2 est un pôle d'ordre 1 de f.
On vient de voir que $f(0) = -\frac{1}{2}$ (prolongement par continuité) et on calcule :
$f(-i) = \frac{\mathrm{Log}(1-i)}{-i(-i-2)} = \frac{\mathrm{Log}(e^{-i\pi/4})}{i(i+2)} = \frac{1}{5}(\ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4})(-1-2i) = -\frac{\pi+\ln 2}{10} + i\frac{\pi-4\ln 2}{20}$.
La fonction f est holomorphe dans le compact à bord $\overline{D}(0,\frac{1}{2})$ donc $\displaystyle\int_{C(0,\frac{1}{2})^+} f(z)dz = 0$ par le théorème de Cauchy. Le chemin $C(2,1)^+$ es le bord du compact à bord $\overline{D}(2,1)$, $f \in \mathcal{H}(\overline{D}(2,1)\setminus\{2\})$ et 2 est un pôle d'ordre 1 de f, d'où, par la formule des résidus,
$$\int_{C(2,1)^+} f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Rés}(f,2) = 2\pi i\,(z-2)f(z)|_{z=2} = 2\pi i\left.\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z}\right|_{z=2} = \pi i\ln 3.$$

9. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\})$ donc f est développable en série entière en $z = 0$. En utilisant les séries géométriques, on a : $\dfrac{z}{4+z^2} = \dfrac{z}{4}\dfrac{1}{1+z^2/4} = \dfrac{z}{4}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^{2n+1}$. Le rayon de convergence R sera le rayon du plus grand disque ouvert de centre 0 inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\}$, soit $R = 2$. On pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert avec le développement obtenu dans la question précédente ($\sum a_k z^k$ avec $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}$).

10. C'est une intégrale de type "fraction rationnelle en cos et sin" (cf. cours) qui vaut $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$. Pour la calculer on introduit $f(z) = \dfrac{1}{3 - 2\frac{z+z^{-1}}{2}}\dfrac{1}{iz} = \dfrac{i}{z^2 - 3z + 1} = \dfrac{i}{(z - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(z - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})}$. La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\}$ avec des pôles d'ordre 1 en $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \in D(0,1)$ et $z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \notin D(0,1)$. Il suit $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta} = 2\pi i\,\mathrm{Rés}(f, \tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2}) = 2\pi i\,(z - \tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2})f(z)\Big|_{z=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$.