Année universitaire 2010-2011
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Vendredi 1 avril 2011 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscriptes, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Exercice 1 On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -u(x,t) + \sin t & 0 \leq x \leq L,\ t > 0, \\ u(0,t) = g(t) & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{1}$$

où $L > 0$ est une constante fixée et $u_0 : [0,L] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues données.

1. Déterminer les caractéristiques.

2. Démontrer que u satisfait l'équation suivante le long d'une caractéristique $x(t)$:

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = -u(x(t),t) + \sin t.$$

3. Trouver la solution générale de l'équation différentielle ordinaire

$$y'(t) + y(t) = \sin t.$$

4. Déterminer la solution $u(x,t)$ de l'équation (1) pour tous $(x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty)$ (on pourra distinguer les cas où $x > vt$ et ceux où $x < vt$).

5. On suppose que $u_0(x) = -1/2$ et $g(t) = (\sin t - \cos t)/2$. Tracer la fonction $t \mapsto u(x,t)$ pour x fixé dans $[0,L]$.
[On rappelle que : $\sin t - \cos t = \sqrt{2}\sin(t - \pi/4)$. *]*

Tourner la page SVP

Exercice 2 On veut résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 \leq x \leq \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0 & t > 0, \\ u(\pi,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 1 & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \tag{2}$$

avec les séries de Fourier.

1. Soit k un entier supérieur ou égal à 1 et a_k, b_k deux constantes. Vérifier que la fonction

$$u_k(x,t) = (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \sin(kx)$$

vérifie l'équation et les conditions limites.

On cherche maintenant une solution de l'équation complète (2) sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x,t).$$

2. Déterminer une suite $(\gamma_k)_{k=1,2,\ldots}$ telle que

$$1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \sin(kx) \qquad \text{pour } 0 < x < \pi.$$

[Indication : on pourra développer en série de Fourier la fonction constante égale à 1 sur $]0,\pi[$ *convenablement prolongée ; on demande de bien préciser le prolongement choisi.]*

3. En utilisant les conditions initiales, déduire de la question précédente la solution de l'équation (2).

——————— FIN ———————