Année universitaire 2016-2017
4ème année GM

# Devoir surveillé d'EDP

Jeudi 4 mai 2017 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

*Documents permis : les textes imprimés distribués en cours, TD, TP et les notes personnelles manuscrites. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.*

**Exercice 1.** On considère l'équation de transport

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où $c$ est une constante et $u_0$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donnée.
Pour résoudre numériquement (1), on considère le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \tag{2}$$

On rappelle que $u_j^n$ est une approximation de $u(x_j, t_n)$ pour tous les $(x_j, t_n)$ dans la grille $(jh, n\Delta t)_{j\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}}$. Les pas d'espace $h$ et de temps $\Delta t$ sont des constantes strictement positives.

**1.1.** Réécrire la schéma sous la forme

$$u_j^{n+1} = u_j^n + a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + b(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n),$$

en donnant les valeurs de $a$ et $b$ en fonction du coefficient CFL $\lambda = c\frac{\Delta t}{h}$. Le schéma (2) est-il explicite ou implicite ?

On définit l'erreur de troncature du schéma (2) par

$$\begin{aligned} R_{jn}(h, \Delta t, u) \quad = \quad & \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} + \frac{c}{2}\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{h} \\ & -\frac{1}{2}\frac{u(x_{j+1}, t_n) + u(x_{j-1}, t_n) - 2u(x_j, t_n)}{\Delta t}, \end{aligned}$$

où $u$ est une solution régulière ($C^4$ par exemple) de (1).

**1.2.** Démontrer qu'il existe une constante $M$ telle que

$$\left| \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} + \frac{c}{2}\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{h} \right| \leq M(\Delta t + h^2)$$

$$\left| \frac{u(x_{j+1}, t_n) + u(x_{j-1}, t_n) - 2u(x_j, t_n)}{\Delta t} \right| \leq \frac{|c|h}{|\lambda|}\left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \right| + Mh^2 \right).$$

**1.3.** Déduire de la question précédente que si $\lambda > 0$ est fixé, le schéma est consistant et d'ordre 1 en temps et espace.

On étudie maintenant la stabilité du schéma.

**1.4.** Réécrire le schéma (2) sous la forme

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_{j+1}^n$$

en donnant les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ en fonction du coefficient CFL $\lambda = c\frac{\Delta t}{h}$.

Pour étudier la stabilité du schéma, on le teste sur les données initiales $u_j^0 = e^{ikx_j}$, $k \in \mathbb{Z}$.

**1.5.** Démontrer que $u_j^n = g(\lambda, kh)^n u_j^0$ avec

$$g(\lambda, kh) = \frac{1-\lambda}{2}e^{ikh} + \frac{1+\lambda}{2}e^{-ikh}.$$

**1.6.** Démontrer que le schéma est stable si et seulement si $|\lambda| \leq 1$.
*[On calculera $|g(\lambda, kh)|^2$ ; on rappelle que le schéma est stable si et seulement si $|g(\lambda, kh)| \leq 1$ pour tous $k$.]*

**1.7.** Donner la formule exacte de la solution de (1) en fonction de $u_0$ et $c$.

**1.8.** On fixe $c = 1$. Sur deux dessins séparés, représenter, dans le demi-plan $(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, une grille avec $\lambda = 1/2$ pour le premier et $\lambda = 2$ pour le deuxième. Sur chacun des dessins, dessiner le cône de dépendance théorique et numérique au point $(x_0, t_3)$. Interpréter.

**Exercice 2.** On veut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma u = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{3}$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$ et $L > 0$ sont des constantes fixées et $u_0$ est une fonction $C^1$ par morceaux sur $[0, L]$.

**2.1.** Déterminer $\mu \in \mathbb{R}$ de sorte que, par le changement de fonction inconnue $v(x, t) = e^{\mu t}u(x, t)$, on se ramène à l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \tag{4}$$

Écrire le nouveau système satisfait par $v$.

**2.2.** On cherche des solutions de (4) à variables séparées sous la forme $v(x, t) = \phi(x)\psi(t)$. Déterminer la forme générale de $\phi$ et $\psi$.

**2.3.** Démontrer que si l'on cherche $\phi$ et $\psi$ de manière à satisfaire les conditions limites, on trouve une infinité de solutions qui peuvent s'écrire $v_k(x, t) = \phi_k(x)\psi_k(t)$ où $k = 0, 1, 2, \ldots$ Donner l'expression des $\phi_k(x), \psi_k(t)$.

**2.4.** Trouver la solution du nouveau système en cherchant $v$ sous la forme

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x)\psi_k(t).$$

En déduire la solution $u(x,t)$ du système initial (3).

**2.5.** Application : on choisit $\gamma = 1$ et $u_0(x) = \cos(\frac{\pi x}{2L})$. Déterminer $u(x,t)$. Représenter *l'allure* du graphe de $u_0$ et de la fonction $x \mapsto u(x,t)$ pour un $t > 0$ fixé.

**2.6.** Décrire une situation physique qui peut être modélisée par le système (3) (on pourra imaginer que $u(x,t)$ est la température dans une barre de longueur $L$ et décrire ce à quoi correspondent les conditions aux limites).

**2.7.** Si $\gamma > 0$, déterminer la limite de $u(x,t)$ quand $t \to +\infty$ et interpréter le résultat à l'aide de la modélisation proposée dans la question précédente. Si maintenant $\gamma < -\frac{\pi^2}{4L^2}$, quelle est la limite de $u(x,t)$ quand $t \to +\infty$ ? Est-ce physique ?

**Exercice 3.** On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \text{ (le bord de } \Omega), \end{cases} \tag{5}$$

où $\Omega$ est un ouvert $C^1$ de $\mathbb{R}^d$, $\lambda$ est une constante réelle et $f \in L^2(\Omega)$.

**3.1.** Écrire la formulation faible du problème (5) dans $H_0^1(\Omega)$.

**3.2.** Démontrer que $l(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.

**3.3.** Démontrer que $a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + \lambda u(x)v(x))dx$ est une forme bilinéaire symétrique continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

**3.4.** Démontrer que, si $\lambda > -\frac{1}{c_\Omega}$, alors la forme bilinéaire $a$ est coercive. En déduire que dans ce cas, il existe une unique solution faible au problème (5).
*[La constante $c_\Omega > 0$ est la constante qui apparaît dans l'inégalité Poincaré.]*

**FIN**