3ème année GMA – 2013-2014

Examen du cours d'EDP

Vendredi 25 avril 2014 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscriptes, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.
Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1. On suppose que la masse volumique u d'un fluide dans un tube de longueur L ne dépend que l'abscisse x dans le tube et du temps t et est régie par les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -u(x,t) + \cos t & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = g(t) & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \le x \le L, \end{cases} \tag{1}$$

où la vitesse $v > 0$ est une constante fixée et $u_0 : [0,L] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues données.

1.1. Soit $0 \le x_0 \le L$ et $t_0 \ge 0$. Déterminer la caractéristique passant par x_0 au temps t_0.

1.2. Démontrer que u satisfait l'équation suivante le long d'une caractéristique $x(t)$:

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = -u(x(t),t) + \cos t.$$

1.3. Trouver la solution générale de l'équation différentielle ordinaire

$$y'(t) + y(t) = \cos t.$$

1.4. Déterminer la solution $u(x,t)$ de l'équation (1) pour tous $(x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty)$ *[on pourra distinguer les cas où $x > vt$ et ceux où $x < vt$.]*

1.5. On suppose que $u_0(x) = 1/2$ et $g(t) = (\cos t + \sin t)/2$. Tracer la fonction $t \mapsto u(x,t)$ pour x fixé dans $[0,L]$.
[On rappelle que : $\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos(t - \pi/4)$.]

Tourner la page SVP

Exercice 2. On veut résoudre, par le méthode de Fourier, l'équation des ondes dans un tube de longueur L suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \beta u(x,t) = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq L, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(L,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

où c et $\beta > 0$ sont des constantes et u_0 est une fonction donnée sur $[0, L]$.

2.1. Quelles sont les unités de c et β ?

2.2. On commence par chercher des solutions particulières de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) = 0 \tag{3}$$

sous la forme $w(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$. Démontrer que l'on peut, comme dans le cours, trouver φ comme solution de l'équation

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\omega^2,$$

et ψ comme solution d'une équation différentielle (évidemment légèrement différente de celle du cours) que l'on précisera (on pourra poser $\gamma = \sqrt{\beta + c^2\omega^2}$). En déduire les expressions générales de φ et ψ.

2.3. Trouver les valeurs de ω telles que la fonction w vérifie les conditions aux limites

$$w(0,t) = w(L,t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{4}$$

On trouve ainsi une famille de solutions $(w_k(x,t))_{k\geq 1}$ de (3)-(4).

2.4. Soit f la fonction définie, pour $x \in [0, 1]$, par $f(x) = x - x^2$. Tracer la fonction f et trouver une suite de coefficients $(b_n)_{n\geq 1}$ telle que l'on ait

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x), \qquad \text{pour } 0 \leq x \leq 1.$$

[On pourra développer en série de Fourier un prolongement convenable de f.]

2.5. En utilisant le cours et tout ce qui précède, déterminer la solution u de (2), avec $L = 1$ et $u_0(x) = f(x)$, sous la forme d'une série

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(\gamma_k t) \sin(k\pi x),$$

où $\gamma_k = \sqrt{\beta + c^2k^2\pi^2}$, les coefficients $(C_k)_{k\geq 1}$ étant à déterminer.

FIN