INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2014-2015
3ème année GMA

# Examen du cours d'EDP

Mardi 7 avril 2015 – durée : 2h

**** *Tous appareils électroniques interdits* ****
*Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscriptes, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.*

**Exercice 1.** On considère un tube horizontal de longueur $2L$ dans lequel circule de la gauche vers la droite un fluide incompressible caloporteur. On suppose que la température $w(x,t)$ ne dépend que de l'abscisse $0 \leq x \leq 2L$ et du temps $t$ et qu'elle est régie par l'équation d'advection

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) + v(x)\frac{\partial w}{\partial x}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < 2L,\ t > 0, \tag{1}$$
$$w(0,t) = \theta(t), \qquad t > 0, \tag{2}$$
$$w(x,0) = w_0(x), \qquad 0 \leq x \leq 2L, \tag{3}$$

où la condition d'entrée à gauche dans le tube $\theta$ et la condition initiale $w_0$ sont des fonctions données. On suppose que la vitesse du fluide dans le tube est

$$v(x) = \begin{cases} v & \text{pour } 0 \leq x \leq L \\ 2v & \text{pour } L \leq x \leq 2L \end{cases}$$

avec $v > 0$ une constante donnée.

**1.1.** Reproduire la Figure 1 sur votre copie et dessinez-y l'allure des caractéristiques.

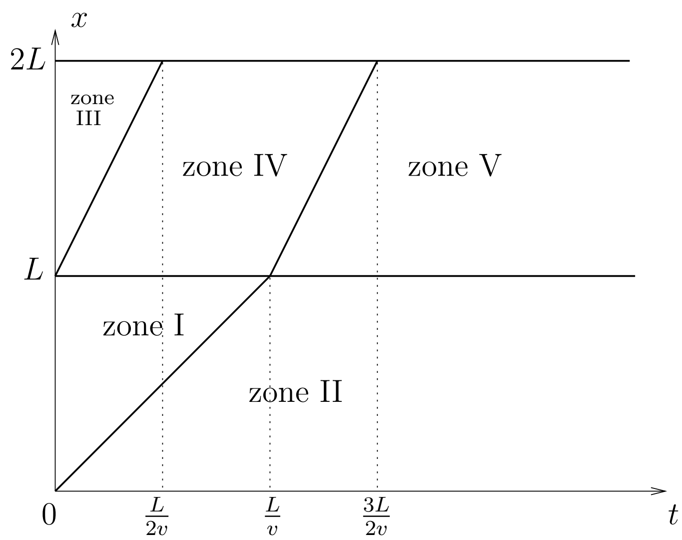


*Figure 1 :* Domaine d'étude

**Tourner la page SVP**

**1.2.** Soit $(t_1, x_1)$ un point dans la zone I. Déterminer l'équation de la caractéristique $x(t)$ passant par ce point pour $x(t) \leq L$. En déduire la valeur $w(x_1, t_1)$.

**1.3.** Soit $(t_2, x_2)$ un point dans la zone II. Déterminer l'équation de la caractéristique $x(t)$ passant par ce point pour $0 \leq x(t) \leq L$. En déduire la valeur $w(x_2, t_2)$.

**1.4.** Soit $(t_3, x_3)$ un point dans la zone III. Déterminer l'équation de la caractéristique $x(t)$ passant par ce point pour $x(t) \leq 2L$. En déduire la valeur $w(x_3, t_3)$.

**1.5.** Soit $(t_4, x_4)$ un point dans la zone IV. Déterminer l'équation de la caractéristique $x(t)$ passant par ce point pour $L \leq x(t) \leq 2L$. En déduire la valeur $w(x_4, t_4)$.

**1.6.** Soit $(t_5, x_5)$ un point dans la zone V. Déterminer l'équation de la caractéristique $x(t)$ passant par ce point pour $L \leq x(t) \leq 2L$. En déduire la valeur $w(x_5, t_5)$.

**1.7.** Avez-vous une idée de la forme que pourrait avoir le tube de sorte que l'écoulement d'un fluide incompressible voit sa vitesse augmenter dans la deuxième partie ?

**Exercice 2.** On considère une barre de métal de longueur $L$ parfaitement isolée latéralement (cf. figure 2). La température $u$ dans la barre ne dépend que de l'abscisse $x$ et est régie par le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L,\ t > 0, \tag{4}$$
$$u(0,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{5}$$
$$u(L,t) = T_L, \qquad t > 0, \tag{6}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{7}$$

où $\lambda > 0$, $T_L \in \mathbb{R}$ sont des constantes et $u_0 : [0, L] \to \mathbb{R}$ est une fonction $C^1$ donnée.

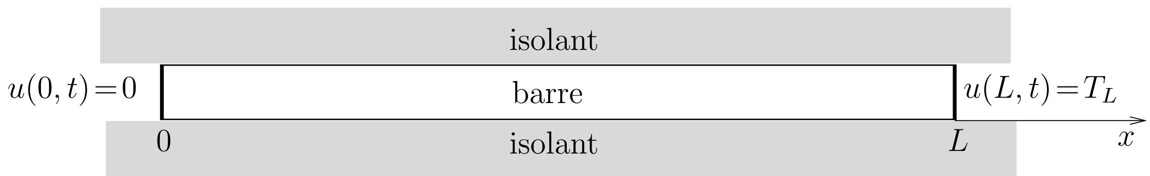


*Figure 2 :* la barre de métal

**2.1.** Quel est le nom et l'unité physique de la constante $\lambda$ qui apparaît dans l'équation (4) ? Expliquer à quoi correspondent physiquement les conditions au bord (5)-(6). Décrire qualitativement (sans résoudre l'équation) l'évolution de la température dans la barre en fonction du temps.

On se propose maintenant de retrouver mathématiquement l'évolution de la température en résolvant le système.

**Tourner la page SVP**

**2.2.** Trouver une fonction affine $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ (c'est-à-dire de la forme $f(x) = \alpha x + \beta$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes à déterminer) de sorte qu'en posant $u(x,t) = v(x,t) + f(x)$, la nouvelle fonction $v(x,t)$ soit solution du système

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L,\ t > 0, \tag{8}$$

$$v(0,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{9}$$

$$v(L,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{10}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{11}$$

où $v_0$ est à déterminer.

**2.3.** On cherche une solution de (8) sous la forme $V(x,t) = \phi(x)\psi(t)$. Écrire les équations différentielles ordinaires satisfaites par $\phi$ et $\psi$ et donner leurs solutions générales.

**2.4.** Démontrer que si l'on cherche $\phi$ et $\psi$ de manière à satisfaire de plus les conditions au bord (9)-(10), on trouve une infinité de solutions qui peuvent s'écrire $V_k(x,t) = \phi_k(x)\psi_k(t)$ avec $k = 1, 2, ...$ Donner l'expression des $\phi_k(x), \psi_k(t)$.

On suppose maintenant que $\underline{u_0(x) = T_L}$ dans la condition (7).

**2.5.** Déterminer des constantes $\gamma_k$, $k = 1, 2, ...$, de sorte que l'on puisse écrire

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

**2.6.** En exploitant la condition initiale (11) et en utilisant la question précédente, trouver une solution $v(x,t)$ du système (8)-(9)-(10)-(11).

**2.7.** Donner une solution $u(x,t)$ du système initial (4)-(5)-(6)-(7). Cette solution est-elle unique ? (on ne demande pas de calculs).

**2.8.** Quelle est la limite de $u(x,t)$ quand $t \to +\infty$ ? Comparer avec 2.1.

**FIN**