Année universitaire 2011-2012
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Mardi 20 mars 2012 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscriptes, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Exercice 1. On considère un tube composé de trois parties : deux tubes en parallèle $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ de même section S, situés entre les abscisses $\{x = 0\}$ et $\{x = a\}$ sont raccordés à un tube unique $\mathcal{T}_3$, de section $2S$, situé entre les abscisses $\{x = a\}$ et $\{x = b\}$ comme illustré sur la figure 1. Dans ce domaine circule, de la gauche vers la droite, un fluide dont la masse volumique moyenne dans une section ne dépend, dans chacun des tubes, que de l'abscisse x et du temps t.

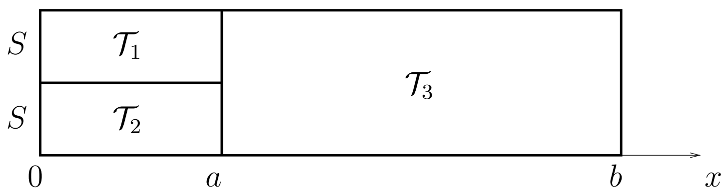

Figure 1 : Domaine d'étude

1.1. Dans le tube $\mathcal{T}_1$, la masse volumique, notée $u_1(x,t)$, est solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) + v\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,t) = 0 & 0 \le x \le a,\ t > 0, \\ u_1(0,t) = \alpha & t > 0, \\ u_1(x,0) = 0 & 0 \le x \le a, \end{cases}$$

où v et α sont des constantes strictement positives données.
Calculer $u_1(x,t)$ pour $0 \le x \le a$, $t \ge 0$, et représenter graphiquement la fonction $t \mapsto u_1(a,t)$ pour $t \ge 0$.

1.2. Dans le tube $\mathcal{T}_2$, la masse volumique, notée $u_2(x,t)$, est solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t) + 2v\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,t) = 0 & 0 \le x \le a,\ t > 0, \\ u_2(0,t) = \beta & t > 0, \\ u_2(x,0) = 0 & 0 \le x \le a, \end{cases}$$

où β est une constante strictement positive donnée (attention : ici la vitesse est $2v$).
Calculer $u_2(x,t)$ pour $0 \le x \le a$, $t \ge 0$, et représenter graphiquement la fonction $t \mapsto u_2(a,t)$ pour $t \ge 0$.

Tourner la page SVP

1.3. Dans le tube $\mathcal{T}_3$, la masse volumique, notée $u_3(x,t)$, est solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial u_3}{\partial t}(x,t) + v\frac{\partial u_3}{\partial x}(x,t) = 0 & a \leq x \leq b,\ t > 0, \\ u_3(a,t) = \frac{u_1(a,t)+2u_2(a,t)}{2} & t > 0, \\ u_3(x,0) = 0 & a \leq x \leq b. \end{cases}$$

La condition limite à gauche permet d'assurer la continuité de la masse en $\{x = a\}$ (cette relation est liée aux sections des tubes et aux vitesses du fluide dans chacun d'entre eux).
Calculer $u_3(a,t)$ pour $t \geq 0$ (masse volumique à l'entrée de $\mathcal{T}_3$) et représenter cette fonction $t \mapsto u_3(a,t)$. Calculer $u_3(x,t)$ pour $a \leq x \leq b$, $t \geq 0$, et représenter graphiquement $t \mapsto u_3(b,t)$ pour $t \geq 0$ (masse volumique à la sortie de $\mathcal{T}_3$).

Exercice 2. On considère une barre de métal de longueur L parfaitement isolée latéralement (cf. figure 2). La température dans la barre ne dépend que de l'abscisse x et est régie par le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L,\ t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{4}$$

où $u_0 : [0,L] \to \mathbb{R}^+$ est définie par $u_0(x) = 20x/L$ pour $x \in [0, L/2]$ et $u_0(x) = 20(1 - x/L)$ pour $x \in [L/2, L]$.

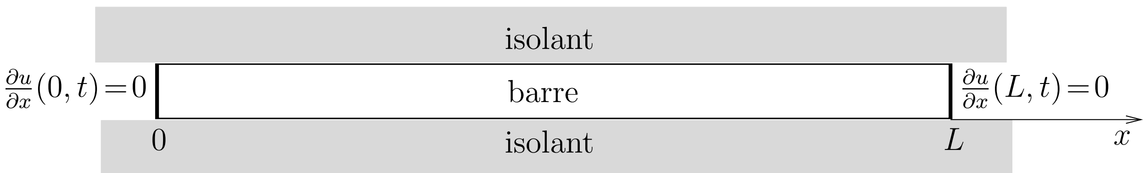

Figure 2 : la barre de métal

2.1. Expliquer à quoi correspondent physiquement les conditions au bord (2)-(3). Décrire qualitativement (sans résoudre l'équation) l'évolution de la température dans la barre en fonction du temps.

On se propose maintenant de retrouver mathématiquement l'évolution de la température en résolvant le système.

2.2. On cherche une solution de (1) sous la forme $v(x,t) = \phi(x)\psi(t)$. Écrire les équations différentielles ordinaires satisfaites par ϕ et ψ et donner leurs solutions générales.

Tourner la page SVP

2.3. Démontrer que si l'on cherche ϕ et ψ de manière à satisfaire de plus les conditions au bord (2)-(3), on trouve une infinité de solutions qui peuvent s'écrire $v_k(x,t) = \phi_k(x)\psi_k(t)$ avec $k = 0, 1, 2, ...$ Donner l'expression des $\phi_k(x), \psi_k(t)$.

2.4. Déterminer des constantes a_k, $k = 0, 1, 2, ...$, de sorte que l'on puisse écrire

$$u_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Calculer a_0 et les a_k pour $k \geq 1$.
[Indication : on pourra prolonger u_0 sur $[-L, 0[$ par parité, puis sur $\mathbb{R}$ par $2L$-périodicité et ensuite appliquer le théorème du développement en série de Fourier de l'exercice 1 de la liste d'exercices 3. Attention, le type de développement demandé est différent des deux types les plus utilisés dans le cours et TD.]

2.5. Trouver la solution $u(x,t)$ du système complet sous la forme

$$u(x,t) = \frac{v_0(x,t)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x,t)$$

en exploitant la condition initiale (4) et en utilisant la question précédente.

2.6. Quelle est la limite de $u(x,t)$ quand $t \to +\infty$?

FIN