3ème année GMA – 2012-2013

Examen du cours d'EDP

Mardi 26 mars 2013 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscriptes, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Exercice 1. On considère un tube de longueur $2L$ qui est chauffé par deux résistances électriques : l'une agissant sur la première partie du tube ($x \in [0, L]$) et l'autre sur la deuxième partie ($x \in [L, 2L]$). On suppose que la température moyenne $u(x,t)$ dans une section est régie par le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = q(x), & 0 \leq x \leq 2L,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 2L, \end{cases} \tag{1}$$

où la vitesse $v > 0$ est une constante donnée et $q(x)$ est une fonction constante par morceaux définie par $q(x) = \alpha$ pour $x \in [0, L[$ et $q(x) = \beta$ pour $x \in [L, 2L]$ ($\alpha, \beta > 0$ sont des constantes).

1.1. Dans cette question, on prend $\alpha = \beta$ (le chauffage est donc uniforme dans le tube).

1.1.1. En reprenant directement ce qui a été fait en cours/TD, déterminer la solution $u(x,t)$ de (1) en tout point du domaine pour tout $t \geq 0$.

1.1.2. On prend $L = 1, v = 2, \alpha = \beta = 1$.
Pour $a \in]0, 2L]$ fixé, tracer la fonction $t \in [0, +\infty[\mapsto u(a,t)$.
Pour $\tau > 0$ fixé, tracer la fonction $x \in [0, 2L] \mapsto u(x, \tau)$ *[On tracera deux courbes, une pour chacun des cas $\tau < 1$ et $\tau > 1$.]*

1.2. Maintenant $\underline{\alpha \neq \beta}$.

1.2.1. Déterminer la solution $u(x,t)$ de (1) en tout point du domaine pour tout $t \geq 0$.
[*Indication : Utiliser la figure 1 ci-dessous : chaque zone correspond à une expression différente de la solution (par exemple les zones I et IV sont très simples à traiter puisque les éléments de fluide n'ont parcouru que la partie gauche du tube).]*

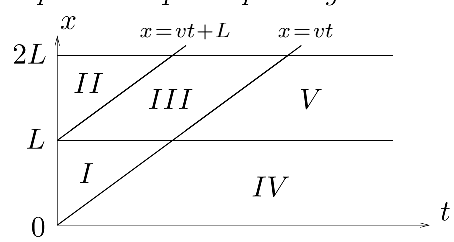

Figure 1 : Les différentes zones

1.2.2. On prend $L = 1$, $v = 2$, $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.
Pour $a \in]0, 2[$ fixé, tracer la fonction $t \in [0, +\infty[\mapsto u(a,t)$. *[On tracera deux courbes, une pour chacun des cas $0 < a < 1$ et $1 < a < 2$.]*

Tourner la page SVP

Exercice 2. On considère une corde vibrante de longueur L fixée à ses deux extrémités comme sur la Figure 2.1. À l'équilibre, l'amplitude de la corde est $v(x,t) = 0$ pour $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$. On suppose que l'évolution de l'amplitude de la corde au cours du temps est régie par l'équation des ondes amortie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = -r\frac{\partial v}{\partial t}(x,t), \qquad 0 < x < L,\ t > 0, \tag{2}$$

où $r > 0$ est une constante fixée.

Les questions 2.1 et 2.5 sont indépendantes des autres.

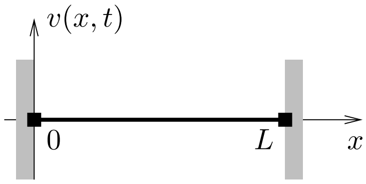

Figure 2.1 : La corde à l'équilibre

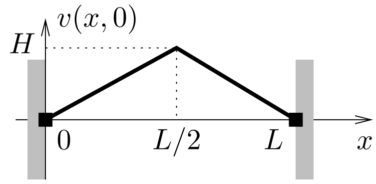

Figure 2.2 : La corde pincée à $t = 0$

2.1. (Cas de la corde pincée) On pince la corde en son milieu, on la soulève à l'altitude H puis on la lâche sans vitesse initiale (cf. Figure 2.2 pour l'amplitude de la corde au moment où on la lâche). Écrire les 2 conditions aux limites et les 2 conditions initiales qu'il faut rajouter à (2) pour décrire le mouvement de la corde.

2.2. On cherche une solution de (2) à variables séparées sous la forme $v(x,t) = \phi(x)\psi(t)$. Démontrer que ϕ et ψ satisfont des EDO du second ordre linéaires à coefficients constants de la forme

$$\phi''(x) + a\phi(x) = 0, \tag{3}$$

$$\psi''(t) + b\psi'(t) + c\psi(t) = 0, \tag{4}$$

où a, b, c sont à déterminer en fonction de r et $\omega^2 = -\dfrac{\phi''(x_0)}{\phi(x_0)} = -\dfrac{\psi''(t_0) + r\psi'(t_0)}{\psi(t_0)}$.

2.3. À partir de maintenant $\underline{r = 1}$ et on suppose que ω est un réel plus grand que 1.

2.3.1. Donner la solution générale de (3).

2.3.2. Démontrer que $\psi(t) = e^{-t/2}\left(C\cos(\frac{\delta t}{2}) + D\sin(\frac{\delta t}{2})\right)$ avec C, D constantes réelles et $\delta = \sqrt{4\omega^2 - 1}$, est la solution générale de (4).

2.4. À partir de maintenant $\underline{L = \pi}$. On rajoute à (2) les conditions aux limites

$$v(0,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{5}$$

$$v(\pi,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{6}$$

Démonter qu'il existe une infinité de solutions satisfaisant (2)-(5)-(6) de la forme

$$v_k(x,t) = e^{-t/2}\left(C_k\cos(\frac{\sqrt{4k^2-1}}{2}t) + D_k\sin(\frac{\sqrt{4k^2-1}}{2}t)\right)\sin(kx), \qquad k = 1,2,3,... \tag{7}$$

où les a_k, b_k sont des constantes réelles.

Tourner la page SVP

2.5. On considère la fonction $v_0 : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $v_0(x) = 2H\frac{x}{\pi}$ si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $v_0(x) = 2H(1 - \frac{x}{\pi})$ si $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ où $H > 0$ est une constante fixée. Déterminer une suite $(\gamma_k)_{k=1,2,\dots}$ de sorte que

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \sin(kx), \qquad x \in [0, \pi].$$

[Développer en série de Fourier un prolongement périodique convenable de v_0.]

2.6. On rajoute à (2)-(5)-(6) les conditions initiales

$$v(x,0) = v_0(x), \qquad x \in [0, \pi], \tag{8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad x \in [0, \pi]. \tag{9}$$

Trouver la solution du système (2)-(5)-(6)-(8)-(9) sous la forme $v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x,t)$.

2.7. Décrire très brièvement le phénomène décrit par une corde vibrante gouvernée par le système (2)-(5)-(6)-(8)-(9) et donner l'évolution de l'amplitude pour des temps grands.

FIN