Examen sur les Problèmes de propagation de fronts

Mercredi 29 février 2012 – durée : 1h30

– *Les documents manuscrits et ceux distribués en cours sont permis.*
– *Tous documents imprimés et appareils électroniques interdits.*
– *Sauf mention du contraire, vous pouvez utiliser les résultats du cours sans démonstration.*
– *Les 4 exercices sont indépendants.*
– *Le sujet comporte 3 pages.*

Exercice I. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. En $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$, calculer (sans justifier)

$$\nabla\phi(||x||) \qquad \text{et} \qquad \nabla^2\phi(||x||).$$

Exercice II. Soit Ω_0 un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ sa frontière. On considère une fonction continue $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que $-1 \leq u_0 \leq 1$, $\exists R > 0$ tel que $u_0(x) = -1$ si $||x|| \geq R$,

$$\{x \in \mathbb{R}^N : u_0(x) = 0\} = \Gamma_0 \qquad \text{et} \qquad \{x \in \mathbb{R}^N : u_0(x) > 0\} = \Omega_0.$$

Soit u est l'unique solution de viscosité continue de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + ||Du|| = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0,T), \quad (T \text{ fixé très grand}) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

telle que $u(x,t) \underset{||x||\to+\infty}{\to} -1$ uniformément par rapport à $t \in [0,T]$. On définit

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^N : u(x,t) = 0\}.$$

II.1. Dessiner un exemple de telle fonction u_0 (en dimension $N = 1$ pour $\Omega_0 =]-1,1[$).

II.2. Décrire qualitativement l'évolution de Γ_t et l'illustrer sur un dessin (on ne demande pas de démonstration).

II.3. Soit $v(x,t) = Ae^{-t}e^{-||x||} - 1$ avec $A > 1$.
II.3.1. Représenter $x \mapsto v(x,0)$ (pour $N = 1$).
II.3.2. Démontrer que $v(x,0) \geq u_0(x)$ si A est choisi supérieur à une constante A_0.
II.3.3. Démontrer que, pour $A = A_0$, la fonction v est sur-solution de viscosité de (1).
[On rappelle que, s'il est impossible de "toucher une fonction par en-dessous" avec une fonction-test régulière en un point, alors la condition de sur-solution est automatiquement satisfaite en ce point.]
II.3.4. Appliquer le principe de comparaison du cours entre u et v et en déduire que Γ_t s'éteint en temps fini.

Tournez la page SVP

Exercice III. On considère l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c(x,t)||Du|| = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2}$$

où $c : \mathbb{R}^N \times [0,T] \to \mathbb{R}$ est continue, bornée et lipschitzienne par rapport à x :
$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, t \in [0,T]$, $|c(x,t) - c(y,t) \leq L_c||x-y||$ pour une constante $L_c > 0$.
On rappelle que, pour toute condition initiale u_0 continue bornée avec $u_0(x) \underset{||x||\to+\infty}{\to} -1$, il existe une unique solution de viscosité continue bornée u de (2) telle que $u(x,t) \underset{||x||\to+\infty}{\to} -1$, uniformément par rapport à $t \in [0,T]$.
Le but de cet exercice est de démontrer que, si u_0 est lipschitzienne,

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq L_0||x-y||,$$

alors u est également lipschitzienne par rapport à x, c'est-à-dire qu'il existe $L > 0$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N,\ \forall t \in [0,T], \quad |u(x,t) - u(y,t)| \leq L||x-y||. \tag{3}$$

Pour cela on considère, pour tous paramètres $A, B, \alpha > 0$,

$$M_{AB} = \sup_{x,y\in\mathbb{R}^N,\, t\in[0,T]} \{u(x,t) - u(y,t) - Ae^{Bt}||x-y||\},$$

$$M_{AB\alpha} = \sup_{(x,t,y,s)\in(\mathbb{R}^N\times[0,T])^2} \{u(x,t) - u(y,s) - Ae^{Bt}||x-y|| - \frac{|t-s|^2}{\alpha^2}\}.$$

III.1. Montrer que s'il existe $A, B > 0$ tels que $M_{AB} \leq 0$ alors (3) a lieu avec $L = Ae^{BT}$.

On suppose donc, par l'absurde, que $M_{AB} > 0$ pour tous $A, B > 0$. On admet que, sous ces conditions, le supremum pour $M_{AB\alpha}$ est atteint en $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{y}, \bar{s})$ ($\bar{x} = x_{AB\alpha}$ et de même pour les autres) dans un compact $\mathcal{K}$ indépendant de α et que $\dfrac{|\bar{t}-\bar{s}|^2}{\alpha^2} \underset{\alpha\to 0}{\to} 0$.

III.2. Supposons que $\bar{t} = 0$ et $\bar{s} = 0$. Démontrer que, si $A \geq L_0$, alors $M_{AB\alpha} \leq 0$ et obtenir un contradiction.

III.3. Supposons maintenant que $\bar{t} > 0$ et $\bar{s} > 0$.
III.3.1. Supposons qu'il existe une suite $\alpha_n \to 0$ telle que $\bar{x} \neq \bar{y}$. Écrire les inégalités de viscosité pour $u(x,t)$ sous-solution au point $(\bar{x}, \bar{t})$ et $u(y,s)$ sur-solution au point $(\bar{y}, \bar{s})$. Combiner ces inégalités, faire tendre $\alpha_n \to 0$ et utiliser la condition de Lispchitz sur c pour aboutir à une contradiction si $B > L_c$.
III.3.2. On prend $B > L_c$ au départ. D'après la condition précédente, nécessairement $\bar{x} = \bar{y}$ (au moins pour α petit). Montrer que

$$\limsup_{\alpha\to 0} M_{AB\alpha} \leq 0$$

et obtenir un contradiction.

III.4. On admet que le "cas mixte" ($\bar{t} > 0$ et $\bar{s} = 0$ ou le contraire) se ramène aux cas traités en III.2 et III.3. Conclure que (3) a lieu avec $L = L_0 e^{L_c T}$.

Tournez la page SVP

Exercice IV. Décrire qualitativement l'évolution généralisée dans $\mathbb{R}^3$ du "cylindre infini" $\Gamma_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R_0\}$ dans les deux cas suivants :

IV.1. lorsque la vitesse est égale à la courbure moyenne ;

IV.2. lorsque la vitesse est égale à la courbure gaussienne.

[On demande une explication concise avec quelques éléments de justification pertinents.]

——————— *FIN DE L'ÉNONCÉ* ———————