Examen du cours "Contrôle Optimal"

Mardi 30 janvier 2018 – durée : 3h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Une entreprise produit un bénéfice $x(t) > 0$ au temps t. Une fraction $\alpha(t)x(t)$ de ce bénéfice, avec $0 \le \alpha(t) \le 1$, est réinvestie dans la production et contribue à l'augmentation de la richesse crée par l'entreprise et le reste est distribué aux actionnaires.

On suppose que l'évolution du bénéfice est gouverné par l'EDO

$$\begin{cases} y'(s) = k\alpha(s)y(s), \quad 0 < s \le t, \\ y(0) = x > 0, \end{cases} \tag{1}$$

où k est une constante strictement positive donnée.

La fraction $\alpha(t) \in [0,1]$ réinvestie est considérée comme un contrôle et on considère le problème de contrôle optimal

$$\inf_{|\alpha(\cdot)|\le 1} J(x,t,\alpha(\cdot)) \quad \text{avec } J(x,t,\alpha(\cdot)) := \int_0^t (\alpha(s)-1)y(s)ds.$$

1.1. Interpréter l'EDO (1), en particulier quand $\alpha(s) \equiv 0$ et $\alpha(s) \equiv 1$.

1.2. Expliquer quel est l'objectif de ce problème.

1.3. Écrire le principe du maximum de Pontryagin pour ce problème.
[Écrire l'Hamiltonien $\hat{H}(y,p,\alpha)$, les EDO satisfaites par la trajectoire optimale $y^*(s)$ et l'état adjoint $p^*(s)$, la condition finale $p^*(t)$ et le problème de maximisation permettant de calculer le contrôle optimal $\alpha^*(s)$.]

1.4. En déduire la valeur du contrôle optimal $\alpha^*(s)$ en fonction de k et $p^*(s)$.
[On rappelle que $y^*(s) > 0$ pour tout $s \ge 0$.]

1.5. Résoudre l'EDO satisfaite par p^*.
[Remarquer que $kp(s) \le 1$ sur un intervalle de la forme $[t^*, t]$ avec $kp^*(t^*) = 1$ et que, sur cet intervalle l'EDO est très simple à résoudre. Résoudre ensuite l'EDO sur $[0, t^*]$.]

1.6. Conclure que le contrôle optimal est bang-bang avec un seul saut en t^*, avec t^* introduit dans la question précédente.

1.7. En déduire la trajectoire optimale.

1.8. Calculer la fonction valeur $V(x,t) = \inf_{|\alpha(\cdot)|\leq 1} J(x,t,\alpha(\cdot))$ pour $x > 0$ et $t \in [0,+\infty)$.

1.9. Déterminer l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman satisfaite par V.

1.10. Vérifier la fonction valeur $V(x,t)$ calculée dans la question 8 est bien solution de l'EDP sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ (aux points où V est différentiable). Est-ce l'unique solution de cette EDP ?

Exercice 2. On considère l'EDO contrôlée

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + y^2(t) + \dfrac{v(t)}{2} = f(y(t),v(t)), \quad 0 \leq t_0 < t < T, \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

où $u(t) \in \mathbb{R}$ est la variable de contrôle.

On suppose que T est un horizon fini, que l'état final $y(T)$ est libre et que la fonction coût est donnée par

$$J(y_0,t_0;v) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} (y^2(s) + \gamma v^2(s))ds,$$

avec $\gamma > 0$ une constante positive donnée.

2.1. Écrire le principe du maximum de Pontryagin.

[Donner le Hamiltonien $\hat{H}(y,p,v)$, les EDO satisfaites par la trajectoire optimale y^* et l'état adjoint p^*, la condition finale $p^*(T)$ et le problème de maximisation permettant de calculer le contrôle optimal $v^*(s)$.]

2.2. En déduire le contrôle optimal v^* en fonction de p^* et de γ.

Soit (y_e, v_e) une solution de l'équation $f(y_e,v_e) = 0$.

2.3. Sous quelle condition sur v_e l'équation $f(y_e,v_e) = 0$ admet-elle une solution?

2.4. Linéariser (2) autour de (y_e,v_e) et en déduire l'EDO contrôlée linéaire vérifiée par $x = y - y_e$ et $u = v - v_e$.

2.5. Donner la loi de commande par retour d'état pour le système linéarisé avec la fonction coût

$$J(x_0,t_0;u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} (x^2(s) + \gamma u^2(s))ds. \tag{3}$$

2.6. Que se passe-t-il maintenant si on considère un problème en horizon infini ? C'est-à-dire qu'on suppose que le coût (3) est remplacé par

$$J_\infty(x_0,t_0;u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} (x^2(s) + \gamma u^2(s))ds.$$