# Examen du cours "EDO et modélisation"

Mardi 17 novembre 2015 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
*Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.*
*Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.*

*Les deux exercices sont indépendants.*
*Partage du temps conseillé : 45'–1h pour l'exercice 1, 1h–1h15 pour l'exercice 2.*

**Exercice 1.** On considère le système d'EDO

$$\begin{cases} x'(t) &= -x(t) + 1 - \dfrac{5}{1 + x(t)^2 + y(t)^2}, \\ y'(t) &= e^{x(t)} - 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**1.1.** Prouver que, pour toutes données $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, le système admet une unique solution maximale $(J, (x, y))$ vérifiant $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, où $J = ]\alpha, \beta[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $t_0$.

**1.2.** En utilisant l'équation vérifiée par $x(t)$, démontrer que $[e^t(x(t) - 1)]' = e^t(x'(t) + x(t) - 1) \leq 0$ pour tout $t \in [t_0, \beta[$. En déduire que $x(t) \leq 1 + (x_0 - 1)e^{t_0 - t}$ pour tout $t \in [t_0, \beta[$.

**1.3.** Avec un raisonnement analogue à celui de la question 1.2, en remarquant que $x'(t) + x(t) \geq -C$ où $C > 0$ est à déterminer, prouver que $x(t) \geq (x_0 + C)e^{t_0 - t} - C$ pour tout $t \in [t_0, \beta[$.

**1.4.** Déduire des deux questions précédentes que, si $\beta < +\infty$, alors $|x(t)|$ est borné sur $[t_0, \beta[$. En utilisant l'équation satisfaite par $y(t)$, démontrer qu'alors $|y(t)|$ est aussi borné sur $[t_0, \beta[$. Aboutir à une contradiction et conclure que les solutions maximales sont globales à droite.

Par une démarche analogue qu'on ne demande pas de faire, on prouve qu'elles sont aussi globales à gauche, i.e., $J = \mathbb{R}$.

**1.5.** Trouver les points d'équilibre du système. Écrire les systèmes linéarisés en chaque point d'équilibre, justifier que le théorème d'Hartman-Grobman s'applique et en déduire l'allure du portrait de phase des solutions au voisinage de chaque point d'équilibre en précisant s'il est stable ou instable.
*[Pour tracer l'allure des portraits de phase, on pourra utiliser le formulaire distribué.]*

**Exercice 2.** Les deux premières questions sont indépendantes.

**2.1.** Un randonneur est perdu en montagne dans un épais brouillard qui empêche toute visibilité à plus de quelques mètres. Il veut atteindre un refuge. Il dispose de la carte donnée Figure 1 page 3 sur laquelle sont représentés les courbes de niveaux (lignes de niveau de la fonction altitude), le point $X_0$ qui est sa position approximative et le refuge.

On remarque que le refuge est situé au minimum de l'altitude sur la carte et on suppose qu'il n'y a pas de zone de plat dans la montagne hormis dans la zone du refuge.

**2.1.1.** Décrire une stratégie pour atteindre le refuge qui peut se modéliser avec une EDO. On écrira l'EDO correspondante en utilisant les notations suivantes : $f(x, y)$ donne l'altitude au point de coordonnées $(x, y)$ (longitude et latitude par exemple), la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sera supposée très régulière, $C^2$ par exemple, et le point $X_0$ a pour coordonnées $(x_0, y_0)$. La trajectoire du randonneur sera représentée par $X(t) = (x(t), y(t))$ pour $t \geq 0$ et on supposera que le randonneur avance avec une <u>vitesse constante</u> (égale à 1 pour simplifier).

**2.1.2.** Dessiner sur la carte page 3 la trajectoire du randonneur démarrant de $X_0$ correspondant à la stratégie présentée en 2.1.1.
*[Ne pas oublier de mettre votre nom sur la page 3 et de la rendre.]*

**2.2.** On considère l'EDO

$$X'(t) = -\nabla f(X(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{avec } X(0) = X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

où $f$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\text{(H1)} & f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ est régulière (de classe } C^2\text{)}, \\
\text{(H2)} & f(0,0) < f(X) \text{ pour tout } X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\
\text{(H3)} & \nabla f(X) \neq 0 \text{ si } X \neq (0,0), \\
\text{(H4)} & f(X) \to +\infty \text{ quand } ||X|| \to +\infty.
\end{array}$$

*[Attention : l'EDO (1) n'est pas exactement celle demandée dans la question 2.1.1.]*

**2.2.1.** Prouver l'existence et l'unicité d'une solution maximale $(]-\alpha, T[, X)$ pour toute donnée initiale $X_0 \in \mathbb{R}^2$.

**2.2.2.** Démontrer que, si $X_0 \neq (0,0)$, alors la fonction $h(t) = f(X(t))$ est strictement décroissante et minorée sur $[0, T[$. En déduire que les solutions sont globales à droite, i.e. $T = +\infty$ et que $(0,0)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

**2.2.3.** Vérifiez que $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + 2y^2)$ vérifie les hypothèses (H1)-(H2)-(H3)-(H4). Si $X(t)$ est une solution de (1), trouver une relation entre $y(t)$ et $x(t)$.
*[On pourra écrire le système (1) pour $f$ donnée ci-dessus, calculer $x'(t)/y'(t)$ puis séparer les variables $x$ et $y$.]*
Tracer les lignes de niveaux de $f$ et le portrait de phase de (1) sur le même dessin.

**2.3.** Dans cette question, on fait le lien entre la situation décrite dans la question 2.1 et l'EDO étudiée dans la question 2.2. On suppose que la fonction $f$ de la question 2.2 représente l'altitude de la question 2.1 et que le refuge a pour coordonnées (0,0).

**2.3.1.** Les EDO des questions 2.1.1 et 2.2 sont différentes mais expliquez pourquoi deux trajectoires démarrant du point $X_0$ ont le même tracé. On appelle maintenant $X(t)$ l'unique solution de (1) démarrant de $X_0$.

**2.3.2.** Expliquer à quoi correspondent physiquement les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) dans la situation de la question 2.1.

**2.3.3.** Soit $t_0 > 0$ et $Y : ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \to \mathbb{R}^2$ un chemin de classe $C^1$ défini dans un voisinage de $t_0$. On suppose que $Y(t)$ est un chemin à altitude constante $h$ (c'est-à-dire $f(Y(t)) = h$ pour tout $t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$) et que $Y(t_0) = X(t_0)$.
Exprimer $h$ en fonction de $F, X, t_0$. Démontrer que $\langle X'(t_0), Y'(t_0) \rangle = 0$ (rappelons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$) et interpréter géométriquement le résultat.

**Prénom :**

**Nom :**

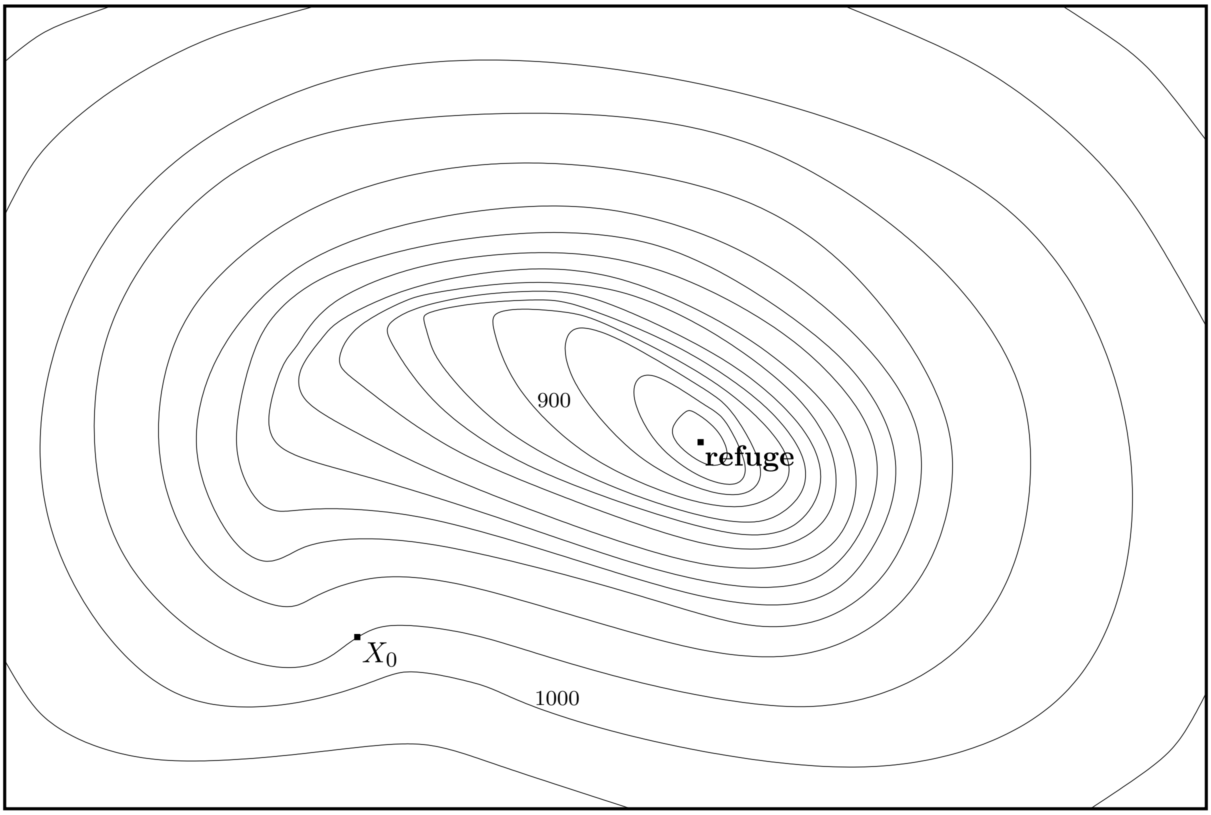


*Figure 1 :* Les courbes de niveau sont espacées de 10 m.