Examen du cours “EDO et modélisation”

Mardi 23 octobre 2018 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère le système d'EDO

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + \arctan\big(y(t)^2 - 1\big) - 1, \\ y'(t) &= x(t)^3 - 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.1. Prouver que, pour toutes données $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le système admet une unique solution maximale $(J, (x, y))$ vérifiant $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, où $J =]\alpha, \beta[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.

On ne va s'intéresser aux solutions que pour des $t \geq 0$ et on cherche à montrer que les solutions sont globales à droite (i.e., $\beta = +\infty$).

1.2. En utilisant l'équation vérifiée par $x(t)$, démontrer que $x'(t) \leq x(t) + C$ pour tout $t \in [t_0, \beta[$, pour une constante $C > 0$ dont on donnera une valeur possible, puis que $e^{-t}(x'(t) - x(t) - C) \leq 0$. En déduire que $x(t) \leq e^t(x_0 + C) - C$ pour tout $t \in [0, \beta[$.

1.3. Avec un raisonnement analogue à celui de la question 1.2, en remarquant que $x'(t) - x(t) \geq -D$ où $D > 0$ est à déterminer, prouver que $x(t) \geq e^t(x_0 - D) + D$ pour tout $t \in [0, \beta[$.

1.4. Déduire des deux questions précédentes que, si $\beta < +\infty$, alors $|x(t)|$ est borné sur $[0, \beta[$. En utilisant l'équation satisfaite par $y(t)$, démontrer qu'alors $|y(t)|$ est aussi borné sur $[0, \beta[$. Aboutir à une contradiction et conclure que les solutions maximales sont globales à droite.

1.5. Trouver les points d'équilibre du système. Écrire les systèmes linéarisés en chaque point d'équilibre, justifier que le théorème d'Hartman-Grobman s'applique et en déduire l'allure du portrait de phase des solutions au voisinage de chaque point d'équilibre en précisant s'il est stable ou instable.
[Pour tracer l'allure des portraits de phase, on pourra utiliser le formulaire distribué.]

Tournez svp

Exercice 2. (Effet Allee) Dans le modèle logistique de Verhulst, l'effectif N d'une population est modélisé par l'équation différentielle ordinaire

$$N'(t) = f(N(t)),$$

où la fonction f représente le taux de croissance de la population qui est négatif lorsque la population est trop nombreuse (par exemple due à la compétition entre les individus pour des ressources limitées) et qui est positif et linéaire pour de petits effectifs de population (et cela empêche la population de s'éteindre).

2.1. Tracer la fonction $N \in [0, +\infty) \mapsto f(N) \in \mathbb{R}$ dans le cas du modèle logistique de Verhulst et illustrer brièvement les élements ci-dessus sur le dessin.

Il arrive cependant pour certaines espèces que le taux de croissance de la population soit également négatif pour de petits effectifs. Cela porte le nom d'*effet Allee*[1] et est dû par exemple à la difficulté de trouver un partenaire pour se reproduire pour une population raréfiée et très territoriale. Pour modéliser l'effet Allee, on cherche un taux de croissance satisfaisant les hypothèses suivantes :

- Le taux de croissance est négatif lorsque la population est trop importante (au dela d'un seuil K appelé capacité limite du milieu) ;
- Le taux de croissance est négatif lorsque la population est trop petite (en deçà d'un taux L appelé population critique) ;
- Si la population est nulle, elle reste nulle ;
- La population ne croît qu'entre "trop petite" et "trop grande" (c'est-à-dire entre L et K).

2.2. Tracer l'allure d'un taux de croissance g satisfaisant les hypothèses ci-dessus. On placera K et L sur le dessin.

À partir de maintenant on modélise l'effet Allee par l'équation différentielle ordinaire

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{\alpha}\right)\left(\frac{N(t)}{\beta} - 1\right), \tag{1}$$

où $r > 0$ et $0 < \beta < \alpha$.

2.3. Exprimer α et β en fonction de K et L. Tracer l'allure de la fonction $g(N) = rN\left(1 - \frac{N}{\alpha}\right)\left(\frac{N}{\beta} - 1\right)$ en représentant r, α et β sur le dessin. Proposer une interprétation pour r.

2.4. Démontrer que pour toute donnée initiale $N_0 \geq 0$, il existe une unique solution maximale N de (1) définie sur $[0, T[$ (on ne s'intéresse qu'aux temps positifs) avec $T > 0$.

2.5. Trouver les points d'équilibre de l'EDO et les solutions stationnaires qu'on tracera dans un repère avec le temps t en abscisse et l'effectif N en ordonnée.

2.6. Démontrer que, pour tout $N_0 \geq 0$, la solution de (1) associée à la donnée initiale N_0 est globale à droite.

[On pourra s'inspirer de l'exercice sur l'équation logistique de Verhulst traité en TD.]

2.7. Tracer l'allure des solutions sur le dessin de la question 2.5 ainsi que le diagramme de phase de l'équation pour $N \geq 0$. Préciser la stabilité des points d'équilibre. Interpréter les trois types de solutions non stationnaires obtenues.

[On ne demande pas de résoudre explicitement l'EDO.]

[1] Warder C. Allee (1894-1980) zoologiste américain.