

## Examen du cours “EDO et modélisation”

Mercredi 23 octobre 2019 – durée : 2h

\*\*\*\* *Tous appareils électroniques interdits* \*\*\*\*

*Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.*

*Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.*

*Les deux exercices sont indépendants.*

**Exercice 1.** On considère l’EDO scalaire

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t)^2, & t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**1.1.** Prouver que, pour toutes données  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , l’EDO admet une unique solution maximale  $(J, y)$  où  $J = ]\alpha, \beta[$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ .

**1.2.** Résoudre explicitement l’EDO et tracer l’allure des solutions dans le plan  $(t, y)$ . [On distinguera les cas  $y_0 = 0$ ,  $y_0 > 0$  et  $y_0 < 0$ .]

On considère maintenant l’EDO scalaire

$$\begin{cases} z'(t) = f(z(t)), & t \in \mathbb{R} \\ z(0) = z_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec  $f$  est une fonction continue localement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) \leq -x^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

**1.3.** Prouver que, pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}$ , l’EDO admet une unique solution maximale  $(]S, T[, z)$  avec  $S < 0 < T$ .

À partir de maintenant, on fixe  $z_0 > 0$  et on veut démontrer que la solution  $z$  est globale à droite.

**1.4.** Démontrer que  $z(t) > 0$  pour tout  $t \in ]S, T[$ . [Comparer  $z$  avec une solution stationnaire de l’EDO.]

**1.5.** Vérifier que, pour tout  $t \in ]S, T[$ ,  $z'(t) \leq -z(t)^2$ .

**1.6.** En intégrant la relation précédente, démontrer que, pour tout  $t \in ]S, T[$ ,  $z(t) \leq \frac{1}{C+t}$  où  $C > 0$  est une constante à déterminer.

**1.7.** Dédurre des questions 1.4 et 1.6 que  $z(t)$  est borné sur  $[0, T[$  et en conclure que la solution  $z$  est globale à droite.

**Tournez svp**

**Exercice 2.** Pendule inversé.

On considère un pendule de masse  $m$  constitué d'une tige rigide de masse négligeable de longueur  $\ell$  pouvant tourner autour d'un axe dans un plan vertical à ce dernier (cf. Figure 1). On suppose que le pendule est soumis à la gravitation (on note  $g$  l'accélération de la pesanteur) et qu'il n'y a pas de frottement. À tout instant  $t$ , la position du pendule est repérée par l'angle  $\varphi(t)$  que fait la tige par rapport à la position verticale renversée.

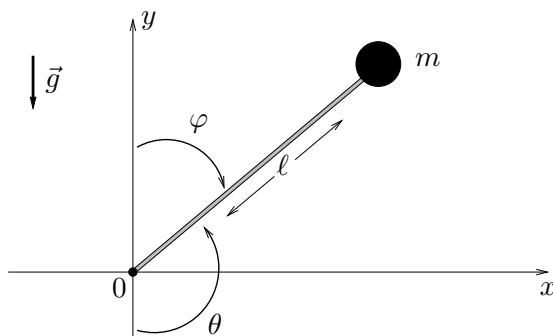


Figure 1: Pendule inversé

*Remarque :* c'est exactement le même problème que le pendule classique à ceci près qu'on décrit le mouvement avec l'angle  $\varphi$  et non  $\theta = \varphi + \pi$ .

**2.1.** Sans calculs, donner les points d'équilibre du système et discuter de leur stabilité.

**2.2.** (*Il n'est pas nécessaire de traiter cette question pour la suite de l'exercice.*) Démontrer que l'angle  $\varphi$  vérifie l'EDO

$$\varphi'' - \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

[On pourra faire le bilan des forces et utiliser le principe fondamental de la dynamique de Newton ou utiliser, qu'en l'absence de frottement, l'énergie du système  $E(t) = mg\ell \cos \varphi(t) + \frac{1}{2}m\ell^2(\varphi'(t))^2$  est préservée au cours du temps.]

On écrit l'EDO (1) sous la forme d'une EDO d'ordre 1,

$$X'(t) = F(X(t)) = \begin{pmatrix} F_1(X(t)) \\ F_2(X(t)) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \varphi', \quad (2)$$

et  $F_1(X) = F_1(\varphi, v) = v$ .

**2.3.** Donner l'expression de  $F_2(\varphi, v)$  en utilisant l'EDO (1).

**2.4.** En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, démontrer que le problème de Cauchy constitué du système (2) associé à la condition initiale  $X(t_0) = X_0 = (\varphi_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  a une unique solution globale sur  $\mathbb{R}$ .

**2.5.** Trouver tous les points d'équilibre du système (2) et comparer avec la question 2.1. Étudier la stabilité dans le cas du point  $(0, 0)$  en considérant l'EDO linéarisée et en s'aidant des résultats du poly et du théorème d'Hartman-Grobman. Dans le cas du point  $(\pi, 0)$ , le théorème d'Hartman-Grobman s'applique-t-il ?

**Tournez svp**

**2.6.** Sur la figure 2, on a dessiné l'allure du portrait de phase de l'EDO (1) (ou du système (2)). À quoi correspondent les points  $A$  et  $B$  ? Interprétez qualitativement les trajectoires  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  (brièvement et sans calculs).

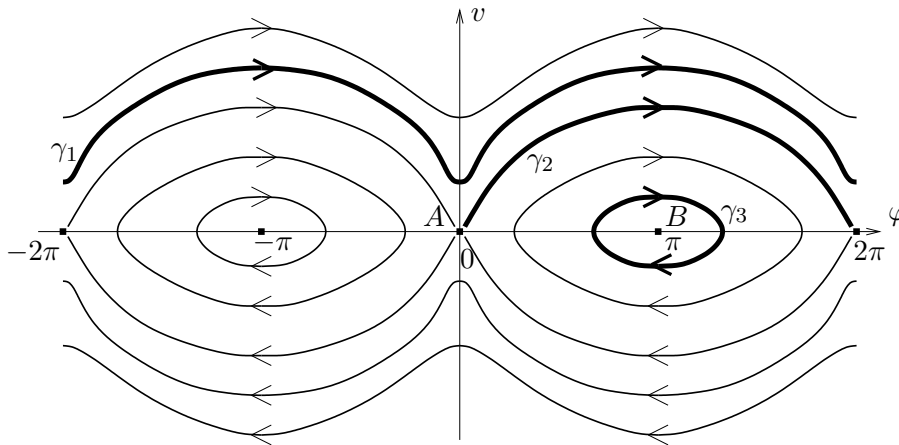


Figure 2: Portrait de phase du pendule inversé

On veut maintenant stabiliser le pendule en position renversée. Pour cela, on place la base du pendule sur un petit chariot pouvant se déplacer sur la droite  $(Ox)$  (voir Figure 3). En appliquant une accélération  $u$  au chariot, on agit sur l'évolution de l'angle  $\varphi$  et on admet que  $\varphi$  satisfait maintenant la nouvelle EDO

$$\varphi'' - \frac{g}{\ell} \sin \varphi + \frac{u}{\ell^2} = 0. \quad (3)$$

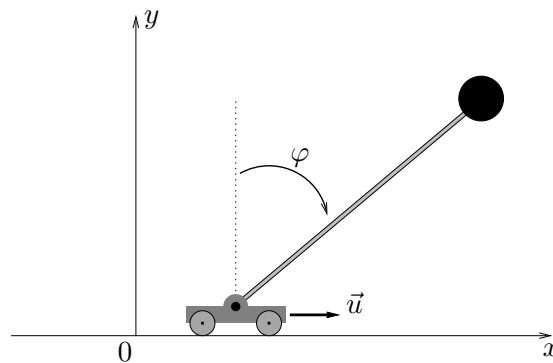


Figure 3: Pendule inversé contrôlé

On choisit d'appliquer une accélération par retour d'état, c'est-à-dire de la forme

$$u(t) = a\varphi(t) + b\varphi'(t), \quad a, b \text{ constantes.}$$

**2.7.** Préciser la nouvelle expression de  $F_2(\varphi, v)$  quand on écrit l'EDO (3) sous la forme d'un système (2).

**2.8.** Expliquer brièvement pourquoi le nouveau système a encore une unique solution globale pour toute condition initiale  $X_0 = (\varphi_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Tournez svp

**2.9.** Procéder comme dans la question 2.5 pour démontrer que si l'on choisit  $a = \ell^2 + g\ell$  et  $b = 2\ell^2$  alors le point  $(0, 0)$  devient un équilibre asymptotiquement stable du système ; tracer l'allure du portrait de phase au voisinage de  $(0, 0)$ .

**2.10.** (*Bonus*) Est-il possible de stabiliser le pendule renversé en considérant des accélérations  $u(t) = a\varphi(t)$  qui ne dépendent que de  $\varphi$  ?

————— FIN —————