Examen du cours "EDO et modélisation"

Mardi 25 octobre 2022 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents distribués dans le cadre de ce cours (polycopié).
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère l'EDO

$$y' - \frac{1}{t}y - y^2 = -9t^2, \quad t \in]0, +\infty[. \tag{1}$$

1.1. Prouver que, pour toutes donnée $(t_0, y_0) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}$, l'EDO (1) admet une unique solution maximale (J, y).

1.2. Déterminer $a > 0$ de sorte que $y_1(t) = at$ soit une solution particulière de (1).

1.3. Résoudre explicitement l'EDO (1).
On remarquera que c'est une équation de Riccati qui peut se transformer par le changement de fonction inconnue $y = y_1 + z$ en une équation de Bernoulli pour z qui elle-même se résout (cf. polycopié).

Exercice 2. On considère l'évolution en fonction du temps d'une population $x(t)$ de lapins et $y(t)$ de moutons en compétition pour leur nourriture (de l'herbe) qui n'est disponible qu'en quantité limitée. On fait les deux hypothèses suivantes :

(H1) L'évolution de chacune des espèces, en l'absence de l'autre, est gouvernée par l'équation logistique de Verhulst (comme dans l'exercice de TD). Comme les lapins ont une capacité de reproduction plus importante que les moutons, leur taux de croissance intrinsèque est plus élevé que celui des moutons.

(H2) Lorsque lapins et moutons broutent l'herbe côte à côte, ils doivent partager les ressources disponibles ce qui réduit leur taux de croissance d'un facteur proportionnel à la taille de la population de l'espèce concurrente. Les moutons, plus imposants que les lapins, peuvent bousculer ces derniers et ainsi capter plus de nourriture lors de ces conflits ce qui pénalise la population de lapins.

L'évolution des deux populations est modélisé par le système d'EDO

$$\begin{cases} x' = 3x - x^2 - 2xy, \\ y' = 2y - y^2 - xy. \end{cases} \tag{2}$$

2.1. Expliquer comment les hypothèses (H1) puis (H2) se traduisent dans les différents coefficients qui apparaissent dans le système (2).

2.2. Démontrer que pour toute population initiale $(x_0, y_0) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$ au temps $t = 0$, il existe une unique solution maximale $(J, (x(t), y(t)))$ du problème de Cauchy, où

$J =]S, T[$ avec $-\infty \leq S < 0 < T \leq +\infty$.
Dans la suite, on ne s'interessera à la solution que sur $[0, T[$.

2.3. Décrire les solutions dans les trois cas suivants et représenter ces solutions sur le portrait de phase du système :
2.3.1 $(x_0, y_0) = (0, 0)$,
2.3.2 $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$, $x_0 > 0$ (évolution de l'espèce x en l'absence de y),
2.3.3 $(x_0, y_0) = (0, y_0)$, $y_0 > 0$ (évolution de l'espèce y en l'absence de x).
On pourra utiliser sans démonstration et sans donner les formules en détail, les résultats de l'exercice de TD sur l'équation logistique.
Reproduire sur votre copie la Figure 1 et faire les trois tracés sur la même figure.

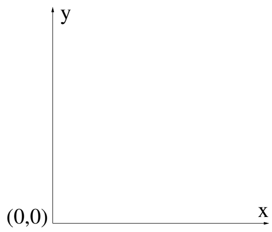

Figure 1

On suppose à partir de maintenant que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

2.4. (La solution est globale à droite)
2.4.1. Justifier que $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T[$ *(on pourra raisonner à partir de la figure tracée à la question 2.3).*
2.4.2. En déduire que $x'(t) \leq 3x(t)$ et $y'(t) \leq 2y(t)$ puis que $x(t) \leq x_0 e^{3t}$ et $y(t) \leq y_0 e^{2t}$ sur $[0, T[$.
2.4.3. Conclure que nécessairement la solution est globale à droite ($T = +\infty$).

2.5. (Points d'équilibre du système et portrait de phase)
2.5.1. Trouver les 4 points d'équilibre du système.
2.5.2. Pour chacun des points d'équilibre, étudier leur stabilité. *Pour étudier la stabilité de chacun des points d'équilibre et l'allure du portrait de phase à son voisinage, on étudiera l'EDO linéarisée correspondante (à l'aide du formulaire sur les systèmes linéaires en dimension 2) et on justifiera qu'on peut appliquer le théorème de Hartman-Grobman.*
2.5.3. Proposer un portrait de phase global du système en complétant votre dessin de la question 2.3.

2.6. Interpréter les résultats trouvés. Plus précisément, comment évoluent les populations lorsqu'on démarre avec beaucoup de lapins et peu de moutons, puis inversement lorsqu'on démarre avec beaucoup de moutons et peu de lapins ?

2.7. Supposons maintenant que l'espèce x qui se reproduit le mieux soit aussi celle qui a le dessus lors des conflits. Le système modélisant cette situation est alors de la forme

$$\begin{cases} x' = 3x - x^2 - xy, \\ y' = 2y - y^2 - 2xy. \end{cases}$$

Il n'y alors plus que 3 points d'équilibre dans $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$. Comment les populations vont-elles évoluer dans ce cas ?
On pourra proposer un scénario sans faire beaucoup de calculs.

——— FIN ———