INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2020-2021
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Jeudi 25 mars 2021 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis : les notes de cours et TD (versions personnelles manuscrites ou notes du prof imprimées) et les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère un fluide caloporteur parcourant un tube de longueur L de section constante à la vitesse constante $v > 0$. La température en Kelvin du fluide ne dépend que de l'abscisse x et du temps t et est notée $w(t, x)$. Ce tube échange avec le milieu extérieur de sorte que l'évolution de la température est modélisée par l'EDP

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + v\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) = \alpha t \qquad 0 < x < L, t > 0, \tag{1}$$

$$w(0,x) = w_0(x) \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{2}$$

$$w(t,0) = g(t) \qquad t > 0, \tag{3}$$

où $w_0 : [0, L] \to \mathbb{R}$ et $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

1.1. Quelle est l'unité de la constante α ?

1.2. Déterminer la caractéristique passant par l'abscisse $\bar{x} \in [0, L]$ au temps $\bar{t} > 0$. Représenter les caractéristiques sur un schéma.

1.3. On fixe une caractéristique $x(t)$ et on considère la quantité $W(t) = w(t, x(t))$ où w est la solution du système. Calculer $W'(t)$.

1.4. Trouver la solution w du système ci-dessus en distinguant 2 zones.
[Indication : On intègrera $W'(t)$ en se servant de la condition initiale (2) *dans la première zone et en se servant de la condition au bord* (3) *dans la deuxième zone.]*

1.5. Écrire la solution quand $w_0(x) = 0$ et $g(t) = \frac{\alpha}{2}t^2$. Tracer l'allure de la fonction $t \mapsto w(t, L)$ pour $t \geq 0$. Que représente-t-elle ?

Tourner la page SVP

Exercice 2. On considère une barre de métal de longueur L parfaitement isolée latéralement comme sur la Figure 1. La température $u(t,x)$ dans la barre ne dépend que de l'abscisse x et du temps t et son évolution est modélisée par le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \qquad t > 0,\ 0 < x < L, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, \qquad t > 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0, \qquad t > 0, \tag{6}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{7}$$

où $\lambda > 0$ est fixé et la fonction $u_0 : [0,L] \to \mathbb{R}$ est définie par $u_0(x) = A\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)^2$ pour $x \in [0,L]$ avec $A > 0$ fixée.

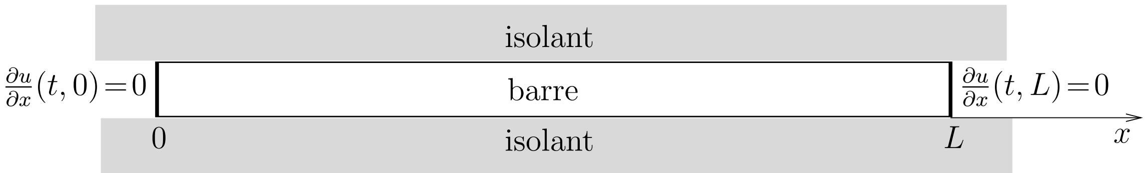

Figure 1 : la barre de métal

2.1. Interprétation physique

2.1.1. Que représente la fonction u_0 ? Quelle est l'unité de la constante A ? Tracer u_0 sur $[0,L]$.

2.1.2. Expliquer à quoi correspondent les conditions au bord (5)-(6) physiquement.

2.1.3. Décrire qualitativement (sans faire de calculs) l'évolution de la température dans la barre en fonction du temps.

On se propose maintenant de retrouver mathématiquement l'évolution de la température en résolvant le système.

2.2. On cherche une solution de (4) sous la forme $v(t,x) = \varphi(x)\psi(t)$. Écrire les équations différentielles ordinaires satisfaites par φ et ψ et donner leurs solutions générales.

2.3. Démontrer que si l'on cherche φ et ψ de manière à ce que v satisfasse en plus les conditions au bord (5) et (6), on trouve une infinité de solutions que l'on peut écrire $v_k(x,t) = \varphi_k(x)\psi_k(t)$ avec $\varphi_k(x)$ et $\psi_k(t)$ à déterminer pour tous $k = 0, 1, 2, \cdots$.

Tourner la page SVP

2.4. Déterminer des constantes a_k, $k = 0, 1, 2, \cdots$, de sorte que l'on puisse écrire

$$u_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

(u_0 est la fonction définie dans l'énoncé). Calculer a_0 et les a_k pour $k \geq 1$.
[Indication : on pourra prolonger u_0 sur $[-L, 0[$ par parité, puis sur $\mathbb{R}$ par $2L$-périodicité et ensuite appliquer le théorème du développement en série de Fourier rappelé dans la liste 3 d'exercices. On admettra que le résultat de la question 2 est valide en remplaçant "sin" par "cos" et "impair" par "pair".]

2.5. Trouver la solution $u(t, x)$ du système complet sous la forme

$$u(t, x) = \frac{v_0(t, x)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(t, x)$$

en exploitant la condition initiale (7) et en utilisant la question précédente.

2.6. Retrouve-t-on les résultats prédits dans la question 2.1.3 ? Quelle est la limite de $u(t, x)$ quand $t \to +\infty$?

FIN