INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2021-2022
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Mardi 22 mars 2022 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Seuls documents permis : les supports de cours et TD mis à disposition, vos notes personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD.

Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. On veut résoudre l'EDP de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + v(t)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = t - u(t,x), \qquad 0 < x < L,\ 0 < t < T, \tag{1}$$

$$u(t,0) = \theta(t), \qquad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{3}$$

avec $v(t) = t+1$, $\theta(t) = t$ et $u_0(x) = x - 1$.

1.1. Calculer l'expression de la caractéristique $x(t)$ passant par le point (t_0, x_0) pour $0 \leq t_0 \leq T$, $0 \leq x_0 \leq L$. Représenter l'allure des caractéristiques sur un dessin.

1.2. Trouver l'Équation Différentielle Ordinaire qui régit la variation de u le long de la caractéristique $x(t)$ et donner la solution de cette EDO à une constante près. *[On dérivera par rapport au temps la quantité $u(t, x(t))$. Pour la solution particulière de l'EDO, penser à des solutions très simples.]*

1.3. Résoudre le problème (1)-(2)-(3).
[Donner la solution dans chacune des zones séparées par la caractéristique critique.]

Exercice 2. On considère une corde vibrante de longueur L fixée à ses deux extrémités, à l'altitude 0 en $x = 0$ et à l'altitude $\beta > 0$ en $x = L$. La corde à l'équilibre est représentée sur la Figure 1. On suppose que l'évolution de l'amplitude $u(t,x)$ de la corde au cours du temps est régie par l'EDP des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 \qquad 0 < x < L,\ t > 0. \tag{4}$$

Plusieurs questions peuvent être traitées indépendamment des autres.

2.1. On suppose que le profil initial de la corde est donné par la fonction $u_0(x) = \beta\left(\frac{x}{L}\right)^2$ pour $0 \leq x \leq L$ et que la corde est lâchée sans vitesse initiale. Écrire les 2 conditions aux limites et les 2 conditions initiales qu'il faut rajouter à (4) pour décrire complètement le mouvement de la corde.

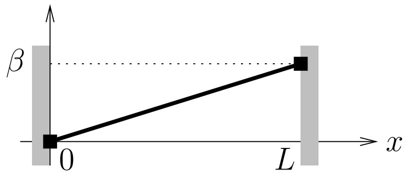

Figure 1: La corde à l'équilibre

2.2. Donner l'expression de la fonction *linéaire* $f(x)$, $0 \leq x \leq L$, telle que $f(0) = 0$ et $f(L) = \beta$ qui représente la corde à l'équilibre (cf. Figure 1).

2.3. On veut se ramener à un système d'équation des ondes étudié en cours. Pour cela on fait le changement de fonction inconnue $v(t,x) = u(t,x) - f(x)$. Écrire le nouveau système, EDP + 2 conditions initiales + 2 conditions au bord, satisfait par $v(t,x)$.

2.4. Résoudre le système

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0, \tag{5}$$

$$w(0,x) = w_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0,x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{7}$$

$$w(t,0) = 0, \qquad t > 0, \tag{8}$$

$$w(t,L) = 0, \qquad t > 0, \tag{9}$$

où w_0 est une fonction donnée de classe C^1 sur $[0,L]$.
[On pourra appliquer ce qui a été fait en cours sans refaire tous les calculs. On demande surtout d'expliquer quels sont les coefficients qui apparaissent dans la formule finale pour $w(t,x)$ en fonction des données initiales (6) *et* (7)*. Respectez les notations de l'énoncé.]*

2.5. En développant en série de Fourier un prolongement périodique convenable de la fonction $\beta\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right)$, $0 \leq x \leq L$, déterminer les γ_k, $k \geq 1$, de sorte que

$$\beta\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \text{pour } 0 < x < L.$$

Tracer la fonction prolongée sur quelques périodes.

2.6. À l'aide des résultats des questions 2.4 et 2.5, déterminer la solution $v(t,x)$ du système obtenu dans la question 2.3. En déduire la solution $u(t,x)$ du problème de départ.

FIN