INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2022-2023
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Lundi 27 mars 2023 – durée : 2h

Seuls documents permis : les supports de cours et TD mis à disposition, vos notes personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Exercice 1. On veut résoudre l'équation de transport d'un fluide compressible posée dans un tube de longueur L,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial (v(x)u(t,x))}{\partial x} = t, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 \le x \le L, \\ u(t,0) = g(t), & t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

où la condition initiale $u_0(x)$ et la condition d'entrée à gauche dans le tube $g(t)$ sont des fonctions données et la vitesse du fluide dans le tube est $v(x) = 1 + x$.

1.1. Déterminer la caractéristique $x(t)$ d'équation $x'(t) = v(x(t))$ passant par le point (t_0, x_0) pour $t_0 > 0$ et $0 \le x_0 \le L$. Dessiner l'allure des caractéristiques.

1.2. Trouver l'Équation Différentielle Ordinaire qui régit la variation de l'inconnue u le long de la caractéristique $x(t)$ et résoudre cette EDO.
[On dérivera par rapport au temps la quantité $u(t, x(t))$.]

1.3. Résoudre le problème (1).
[On donnera la solution dans chacune des zones séparées par la caractéristique critique.]

1.4. Application numérique : donner la solution lorsque $u_0(x) = \frac{-x}{1+x}$ et $g(t) = t$.

Exercice 2. On considère une barre de métal de longueur L parfaitement isolée latéralement (cf. Figure 1). La température u dans la barre ne dépend que de l'abscisse x et est régie par le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \qquad 0 \le x \le L,\ t > 0, \tag{2}$$
$$u(t,0) = 0, \qquad t > 0, \tag{3}$$
$$u(t,L) = T_L, \qquad t > 0, \tag{4}$$
$$u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le L, \tag{5}$$

où $\lambda > 0$, $T_L \in \mathbb{R}$ sont des constantes et $u_0 : [0,L] \to \mathbb{R}$ est une fonction C^1 donnée.

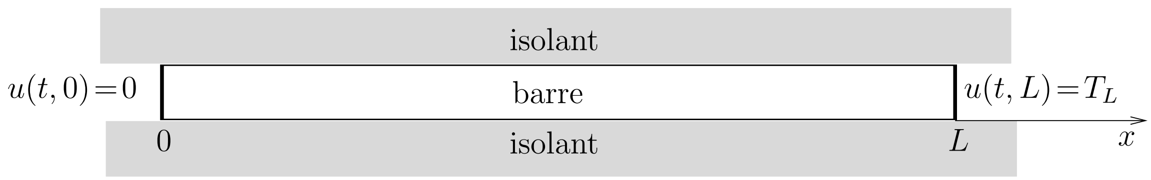

Figure 1 : la barre de métal

2.1. Quel est le nom et l'unité physique de la constante λ qui apparaît dans l'équation (2) ? Expliquer à quoi correspondent physiquement les conditions au bord (3)-(4). Décrire qualitativement (sans résoudre l'équation) l'évolution de la température dans la barre en fonction du temps.

On se propose maintenant de retrouver mathématiquement l'évolution de la température en résolvant le système.

2.2. Trouver une fonction $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = \alpha x + \beta$ (où α et β sont des constantes à déterminer) de sorte qu'en posant $u(t,x) = v(t,x) + f(x)$, la nouvelle fonction $v(t,x)$ soit solution du système

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L, \ t > 0, \tag{6}$$

$$v(t,0) = 0, \qquad t > 0, \tag{7}$$

$$v(t,L) = 0, \qquad t > 0, \tag{8}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{9}$$

où v_0 est à déterminer.

2.3. On cherche une solution de (6) sous la forme $V(t,x) = \phi(x)\psi(t)$. Écrire les équations différentielles ordinaires satisfaites par ϕ et ψ et donner leurs solutions générales.

2.4. Démontrer que si l'on cherche ϕ et ψ de manière à satisfaire de plus les conditions au bord (7)-(8), on trouve une infinité de solutions qui peuvent s'écrire $V_k(t,x) = \phi_k(x)\psi_k(t)$ avec $k = 1, 2, ...$ Donner l'expression des $\phi_k(x), \psi_k(t)$.

On suppose maintenant que $\underline{u_0(x) = T_L}$ dans la condition (5).

2.5. Déterminer des constantes γ_k, $k = 1, 2, ...$, de sorte que l'on puisse écrire

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

2.6. En exploitant la condition initiale (9) et en utilisant la question précédente, trouver la solution $v(t,x)$ du système (6)-(7)-(8)-(9) puis la solution $u(t,x)$ du système de départ (2)-(3)-(4)-(5).

2.7. Quelle est la limite de $u(t,x)$ quand $t \to +\infty$? Comparer avec 2.1.