INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2017-2018
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Mercredi 20 mars 2018 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère un fluide caloporteur parcourant un tube de longueur L de section constante à la vitesse constante $v > 0$. La température du fluide ne dépend que de l'abscisse x et du temps t et est notée $u(t,x)$. Ce tube échange avec le milieu extérieur de sorte que l'évolution de la température est modélisée par l'EDP

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + v\,\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = -\cos(t) + u(t,x) \qquad 0 < x < L, t > 0,\\
&u(0,x) = u_0(x) \qquad 0 \le x \le L,\\
&u(t,0) = \theta(t) \qquad t > 0,
\end{aligned}$$

où $u_0 : [0,L] \to \mathbb{R}$ et $\theta : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

1.1. Déterminer la caractéristique passant par l'abscisse $\bar{x} \in [0,L]$ au temps $\bar{t} > 0$. Représenter les caractéristiques sur un schéma.

1.2. Soit $x(t)$ une caractéristique. Écrire l'EDO régissant la variation de u le long de cette caractéristique.

1.3. Donner la solution générale de cette EDO.

1.4. Déterminer la température $u(t,x)$ dans le tube pour $0 < x < L$ et $t > 0$ en fonction de u_0 et θ.
Distinguer deux zones.

1.5. Écrire la solution quand $u_0(x) = \frac{1}{2}$ et $\theta(t) = \frac{1}{2}(\cos(t) - \sin(t))$.

Tourner la page SVP

Exercice 2. On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, \qquad t > 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0, \qquad t > 0, \tag{5}$$

où L et c sont des constantes strictement positives et $u_0 : [0,L] \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

2.1. Décrire brièvement une situation physique que pourrait modéliser ce problème.

2.2. En utilisant le cours, donner toutes les solutions à variables séparables de la forme $u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$ qui sont solutions de (1).
On posera $\omega^2 := -\frac{\varphi''(x_0)}{\varphi(x_0)} = -\frac{\psi''(t_0)}{c^2\psi(t_0)}$ *où* x_0 *et* t_0 *sont tels que* $\varphi(x_0) \neq 0$ *et* $\psi(t_0) \neq 0$ *si* u *est non identiquement nulle.*

2.3. En exploitant les conditions aux limites, démontrer qu'il existe une infinité de solutions de (1)-(4)-(5) de la forme

$$u_k(t,x) = (C_k \cos(\delta_k t) + D_k \sin(\delta_k t)) \cos(\omega_k x),$$

pour tous $k = 0, 1, 2, \cdots$ et toutes constantes C_k, D_k, où δ_k et ω_k sont à déterminer en fonction de c, L et k.

2.4. En exploitant les conditions initiales avec $u_0(x) = -1$ pour $x \in [0, L/2[$ et $u_0(x) = 1$ pour $x \in [L/2, L[$, trouver la solution du problème complet (1)-(2)-(3)-(4)-(5).
On développera en série de Fourier un prolongement convenable de u_0.

Exercice 3. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormal classique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le champ de vecteur

$$\vec{V}(x,y,z) = 2x^2 y\,\vec{i} + xz^2\,\vec{j} + 4yz\,\vec{k},$$

le volume Ω délimité par les 6 plans d'équations $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ et $z = 3$ et S son bord. Pour tout $(x,y,z) \in S$, on note $\vec{n}(x,y,z)$ la normale unitaire orientée vers l'extérieur et $\vec{dS} = \vec{n} dS$.

3.1. Dessiner Ω dans le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3.2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_S \vec{V} \cdot \vec{dS}$.

FIN