INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

5GM – 2019-2020

Examen du cours "Contrôle Optimal"

Lundi 27 janvier 2020 – durée : 3h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.
Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 On considère l'EDO contrôlée

$$\begin{cases} y'(s) = \alpha(s), \quad 0 < s \leq t \leq T \\ y(0) = x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où les contrôles admissibles appartiennent à l'ensemble

$$\mathcal{A}_T = \{\alpha : [0, T] \to A : \alpha \text{ est mesurable et } A = \mathbb{R}\}.$$

On définit le problème de contrôle optimal

$$V(x,t) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}_T} \frac{1}{2} \int_0^t (y(s)^2 + y(s)\alpha(s) + \alpha(s)^2) ds + \frac{1}{4} y(t)^2.$$

1. Écrire l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman que satisfait la fonction valeur V sur $\mathbb{R} \times (0, T)$ et la condition initiale en $t = 0$. On calculera explicitement le Hamiltonien.

2. Trouver la fonction valeur V.
[On cherchera la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman sous la forme $V(x,t) = \phi(t)x^2$ puis on montrera que ϕ satisfait une EDO de Riccati dont on trouvera la solution évidente.]

3. En déduire la trajectoire optimale et le contrôle optimal sous forme de loi de commande par retour d'état.

Exercice 2 On considère un robot articulé à un degré de liberté, avec une constante de rigidité $\rho > 0$ et un amortissement $\alpha \geq 0$. La dynamique est décrite par l'EDO durant un horizon temporel T

$$\eta \frac{d^2 q}{dt^2} + \alpha \frac{dq}{dt} + \rho q = \rho \theta + \alpha \frac{d\theta}{dt}, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

où q est la position de la liaison, θ est la position du moteur et $\eta > 0$ est l'inertie de la liaison. Le but de cet exercice est de contrôler la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ afin d'atteindre certains objectifs.

1. En posant $x_1 = \theta - q$, $x_2 = \frac{dq}{dt}$ et la variable de contrôle $u = \frac{d\theta}{dt}$, montrer que $X = (x_1, x_2)$ est solution du problème linéaire contrôlé suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + u(t), \\ x_2'(t) = \omega_0^2 x_1(t) + 2\beta\omega_0(-x_2(t) + u(t)), \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{2}$$

avec les constantes ω_0 et β à déterminer.

On suppose que l'état initial $X(0) = (a_1, a_2)$ est une donnée.

2. Analyser la stabilité asymptotique du système (2).

3. On se place dans le cas où $\beta = 0$ et en horizon infini ($T = +\infty$) avec la fonction coût
$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_2^2(s) + u^2(s))ds. \tag{3}$$
Écrire l'équation de Riccati permettant de définir une loi de commande par retour d'état (loi de feedback optimal) pour le système (2). Trouver la solution qui est de la forme $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{pmatrix}$ symétrique avec $p_1 > 0$.

4. On ne suppose plus $\beta = 0$ et on considère maintenant un horizon fini fixé T. On souhaite maximiser la vitesse de liaison x_2 à l'instant T. La fonction coût est alors donnée par
$$J = -x_2(T). \tag{4}$$
De plus, nous supposons que le contrôle u est contraint par la relation:
$$u_{min}(t) \le u(t) \le u_{max}(t), \quad \forall t \in [0, T],$$
avec u_{min} et u_{max} deux fonctions données.

   (a) Écrire le principe de Pontryagin.
   [Donner le Hamiltonien $\hat{H}$ de Pontryagin, les EDO satisfaites par la trajectoire optimale $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ et l'état adjoint $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*)$, la condition finale $\tilde{X}^*(T)$ et le problème d'optimisation contraint permettant de calculer le contrôle optimal u^*.]

   (b) Montrer que le contrôle optimal u^* est donné par
$$u^*(t) = \begin{cases} u_{min}(t), & \text{si } f(t) > 0, \\ u_{max}(t), & \text{si } f(t) < 0, \\ v^*(t), & \text{si } f(t) = 0, \end{cases} \tag{5}$$
   où $v^*(t)$ une valeur arbitraire dans l'intervalle $[u_{min}(t), u_{max}(t)]$ et $f(t) = \tilde{x}_1^*(t) + 2\beta\omega_0\tilde{x}_2^*(t)$ (dite fonction de commutation).

   (c) Considérons le cas particulier de $\beta = 0$.
   (i) Montrer que $f(t) = -\omega_0 \sin(\omega_0(T - t))$ et déduire le nombre maximal de commutations entre 0 et T.
   (ii) Application : tracer le contrôle optimal $u^*(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ avec $T = 2\pi$, $\omega_0 = 2$, $u_{min}(t) = t$ et $u_{max}(t) = 2t$.

   (d) (Question complémentaire) Considérons le cas particulier de $\beta = 1$.
   (i) Montrer que $f(t) = \omega_0^2 e^{-\omega_0(T-t)}(T - t - \frac{2}{\omega_0})$.
   (ii) Analyser le nombre de commutations du système entre 0 et T.