Examen du cours "Contrôle Optimal"

Mardi 7 février 2017 – durée : 3h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère un réservoir d'eau dont la hauteur d'eau au temps s est notée $y(s)$ et qui subit une perte d'eau linéaire en temps et auquel on peut ajouter de l'eau au cours du temps. On modélise le système par l'EDO contrôlée

$$\begin{cases} y'(s) = \alpha(s) - \gamma s, \quad t < s < T \\ y(t) = x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $\gamma > 0$ est une constante donnée, T est l'horizon fini, x est la hauteur d'eau au temps de départ $t \in [0, T]$ et la fonction mesurable $\alpha : [t, T] \to \mathbb{R}$ est le contrôle modélisant l'ajout d'eau. On suppose que le coût d'ajout d'eau est donné par

$$J(x, t, \alpha(\cdot)) = \int_t^T \alpha(s)^2 ds$$

et on veut trouver une stratégie optimale de remplissage du réservoir jusqu'à la hauteur donnée $h \geq x$ minimisant ce coût.

Les 3 questions de l'exercice sont largement indépendantes.

1.1. On suppose dans cette question que l'horizon T est <u>donné</u> et on veut que la hauteur finale du réservoir soit exactement $\underline{y(T) = h}$.

1.1.1. Résoudre le problème en utilisant le principe du maximum de Pontryagin.
[On donnera les contrôle et trajectoire optimaux et la fonction valeur $V(x, t) = \inf_{\alpha(\cdot)} J(x, t, \alpha(\cdot))$.]

1.1.2. Quelle est la limite de $V(x, t)$ quand $t \to T$? Interpréter le résultat.

1.2. On suppose dans cette question que l'horizon T est <u>libre</u> et on veut que la hauteur finale du réservoir soit exactement $\underline{y(T) = h}$. Résoudre le problème en utilisant le principe du maximum de Pontryagin lorsque $\underline{t = 0 \text{ et } x = 0}$.
[On donnera les contrôle, trajectoire et horizon T optimaux.]

1.3. Dans cette question l'horizon T est <u>donné</u> mais <u>on ne fixe plus</u> la hauteur finale $y(T)$. On modifie le coût J par un nouveau coût

$$J_\varepsilon(x, t, \alpha(\cdot)) = \int_t^T \alpha(s)^2 ds + \frac{(y(T) - h)^2}{\varepsilon},$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre donné.

1.3.1. Résoudre le problème en utilisant le principe du maximum de Pontryagin.
[On donnera les contrôle et trajectoire optimaux et la fonction valeur $V_\varepsilon(x,t) = \inf_{\alpha(\cdot)} J_\varepsilon(x,t,\alpha(\cdot))$*.]*

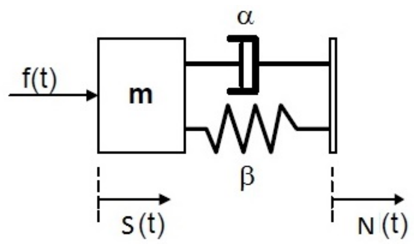
1.3.2. Démontrer que la fonction valeur V_ε est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t} + H(t, \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 & x \in \mathbb{R},\ t \in]0,T[\\ u(x,T) = \frac{1}{\varepsilon}(x-h)^2 & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $H(t,p) = \sup_{a\in\mathbb{R}}\{-p(a-\gamma t) - a^2\}$ est à calculer.
[Attention: comme le problème est non autonome, c'est bien cette forme, un peu différente de celle du cours, de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman avec une condition terminale à la place d'une condition initiale qu'il faut considérer.]

1.3.3. Calculer la limite de V_ε lorsque $\varepsilon \to 0$. Comparer cette limite avec la fonction valeur obtenue dans la question 1.1. Quel est l'intérêt d'ajouter le coût final $\frac{(y(T)-h)^2}{\varepsilon}$ dans cette question ? Quelle est l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman satisfaite par cette limite et interpréter la nouvelle condition terminale obtenue ?

Exercice 2. Considérons le système dynamique présenté dans la figure ci-dessous. Un signal de bruit égal à N est exercé sur le second point d'extrémité du système.



L'objectif du problème de contrôle est de générer une force externe, qui pourrait compenser le bruit de déplacement N. Cette force externe générée est ajustée par le contrôleur et est notée f. Par conséquent, nous avons deux signaux d'entrée N et f (les contrôles) et un signal de sortie S. Partant de l'état intial S_0, le système dynamique satisfait par S est donné par l'équation d'état suivante:

$$\begin{aligned} &S''(t) = \frac{-\alpha}{m}(S'(t) - N'(t)) - \frac{\beta}{m}(S(t) - N(t)) + \frac{f(t)}{m}, \quad t \in]t_0, T[, \\ &S(t_0) = S_0, \end{aligned} \tag{1}$$

avec $m, \alpha, \beta > 0$ trois constantes fixées et T un horizon donné.

2.1. En introduisant une variable intermédiaire d vérifiant la relation suivante

$$\begin{aligned} &d'(t) = -\frac{\beta}{m}(S(t) - N(t)) + \frac{f}{m}, \quad t \in]t_0, T[, \\ &d(t_0) = d_0 \ \text{(supposée connue)}, \end{aligned} \tag{2}$$

primitiver l'équation d'état pour écrire S' en fonction de S, N et f. Mettre alors (1) sous la forme d'un système d'équations différentielles linéaire du 1er ordre dont la fonction d'état

X à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ sera notée par le vecteur $X(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (S(t), d(t))$. Écrire le système sous la forme

$$\begin{aligned} &X'(t) = AX(t) + Bu(t), \quad t \in]t_0, T[, \\ &X(t_0) = X_0, \end{aligned} \tag{3}$$

avec $u = (f, N)$ et, A et B deux matrices à déterminer.

2.2. On suppose que T est un horizon fini, que l'état final $X(T)$ est libre et que la fonction coût est donnée par

$$J(X_0, t_0; u) = \frac{1}{2} X^t(T) S X(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} (X^t(s) Q X(s) + u^t(s) R u(s)) ds \tag{4}$$

avec Q et S deux matrices symétriques semi-définies positives, et R une matrice symétrique définie positive.

2.2.1. Par le principe d'optimalité de Pontryagin, donner le système satisfait par l'état adjoint P et exprimer le contrôle optimal u en fonction de P.

2.2.2. En cherchant $P(t)$ sous la forme $P(t) = W(t)X(t)$ où $W(t)$ est une matrice de taille 2, démontrer que W est solution d'une équation de Riccati (qu'on ne demande pas de résoudre). Exprimer le contrôle optimal u comme une fonction feedback, i.e., sous la forme $u(t) = -K(t)X(t)$ où X la trajectoire optimale et K est une matrice à déterminer en fonction de W et des données du problème.

2.3. On se place maintenant dans le cas d'un horizon infini et on suppose que la fonction coût est donnée par

$$J(X_0, t_0; u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} (X^t(s) Q X(s) + u^t(s) R u(s)) ds \tag{5}$$

avec $m = 100$, $\alpha = 50$, $\beta = 200$, $R = I$ (la matrice identité $I = diag(1, 1)$) et Q est la matrice diagonale $diag(10, 2)$. Comme dans la question précédente, démontrer qu'en cherchant $P(t)$ sous la forme $P(t) = WX(t)$, la matrice constante W est solution d'une équation stationnaire de Riccati et que le contrôle optimal u peut s'écrire comme une fonction feedback $u(t) = -KX(t)$ avec X la trajectoire optimale et K une matrice à déterminer en fonction de W et des données du problème.
NB : S'il vous reste du temps, résoudre l'équation de Riccati et déduire la valeur de la matrice K.