INSA/Université de Rennes 2023-2024

Examen du cours Contrôle Optimal
5MA — M2 Calcul Scientifique et Modélisation
durée : 2h30

Vendredi 26/01/2024 – 15h45-18h15

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Il n'est pas nécessaire de faire tout le sujet pour avoir une bonne note, traiter deux exercics correctement est suffisant pour avoir la note maximale.

Exercice 1. On considère l'EDO contrôlée en dimension 1

$$\begin{cases} {y_{x,u}}'(t) = u(t), & t > 0 \\ y_{x,u}(0) = x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où les contrôles admissibles $\mathcal{A}_\infty$ sont l'ensemble des fonctions mesurables $u(s)$ à valeurs dans $A = \{-1, 0, 2\}$ (ensemble compact discret). On considère le problème de contrôle optimal en horizon infini associé au coût

$$J_\lambda(x,u) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} y_{x,u}(t)^2 dt,$$

en définissant la fonction valeur

$$V_\lambda(x) = \inf_{u \in \mathcal{A}_\infty} J_\lambda(x,u),$$

où $\lambda > 0$.

1. Écrire l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman de ce problème. Tracer la fonction $p \in \mathbb{R} \mapsto H(0,p)$ où H est l'Hamiltonien.
2. Expliquer quelle est la stratégie optimale. En déduire l'expression du contrôle optimal u^* et de la trajectoire optimale y^* correspondante.
3. Calculer la fonction coût associé $w_\lambda(x) = J(x, u^*)$ *[On pourra distinguer les calculs pour* $x \leq 0$ *et* $x \geq 0$.*]*
4. Vérifier que w_λ est solution de l'équation HJB trouvée dans la question 1 et expliquer pourquoi cela justifie bien que u^* est bien le contrôle optimal.
5. Reprendre les questions précédentes dans le cas $\lambda = 0$. A-t-on $V_\lambda(x) \to V_0(x)$ quand $\lambda \to 0$?

Exercice 2. On considère un robot articulé à un degré de liberté, avec une constante de rigidité $\rho > 0$ et un amortissement $\alpha \geq 0$. La dynamique est décrite par l'EDO durant un horizon temporel T

$$\eta \frac{d^2 q}{dt^2} + \alpha \frac{dq}{dt} + \rho q = \rho\theta + \alpha \frac{d\theta}{dt}, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

où q est la position de la liaison, θ est la position du moteur et $\eta > 0$ est l'inertie de la liaison. Le but de cet exercice est de contrôler la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ afin d'atteindre certains objectifs.

1. En posant $x_1 = \theta - q$, $x_2 = \frac{dq}{dt}$ et la variable de contrôle $u = \frac{d\theta}{dt}$, montrer que $X = (x_1, x_2)$ est solution du problème linéaire contrôlé suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + u(t), \\ x_2'(t) = \omega_0^2 x_1(t) + 2\beta\omega_0(-x_2(t) + u(t)), \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{2}$$

   avec les constantes ω_0 et β à déterminer.

   On suppose que l'état initial $X(0) = (a_1, a_2)$ est une donnée.

2. Le système considéré est-il contrôlable en tout temps ? *[Indication : réécrire le système sous la forme $X' = AX + Bu$ et étudier le rang de la matrice de Kalman.]*

3. On se place dans le cas où $\beta = 0$ et en horizon infini ($T = +\infty$) avec la fonction coût

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x_2^2(s) + u^2(s))ds. \tag{3}$$

   Écrire l'équation de Riccati permettant de définir une loi de commande par retour d'état (loi de feedback optimal) pour le système (2). Trouver la solution qui est de la forme $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{pmatrix}$ symétrique avec $p_1 > 0$.

4. On ne suppose plus $\beta = 0$ et on considère maintenant un horizon fini fixé T. On souhaite maximiser la vitesse de liaison x_2 à l'instant T. La fonction coût est alors donnée par

$$J = -x_2(T). \tag{4}$$

   De plus, nous supposons que le contrôle u est contraint par la relation :

$$u_{min}(t) \leq u(t) \leq u_{max}(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

   avec u_{min} et u_{max} deux fonctions données.

   (a) Écrire le principe de Pontryagin.
   [Donner le Hamiltonien $\hat{H}$ de Pontryagin, les EDO satisfaites par la trajectoire optimale $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ et l'état adjoint $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*)$, la condition finale $\tilde{X}^*(T)$ et le problème d'optimisation contraint permettant de calculer le contrôle optimal u^*.]

   (b) Montrer que le contrôle optimal u^* est donné par

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{min}(t), & \text{si } f(t) > 0, \\ u_{max}(t), & \text{si } f(t) < 0, \\ v^*(t), & \text{si } f(t) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

   où $v^*(t)$ une valeur arbitraire dans l'intervalle $[u_{min}(t), u_{max}(t)]$ et $f(t) = \tilde{x}_1^*(t) + 2\beta\omega_0\tilde{x}_2^*(t)$ (dite fonction de commutation).

   (c) Considérons le cas particulier de $\beta = 0$.
   (i) Montrer que $f(t) = -\omega_0 \sin(\omega_0(T - t))$ et déduire le nombre maximal de commutations entre 0 et T.
   (ii) Application : tracer le contrôle optimal $u^*(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ avec $T = 2\pi$, $\omega_0 = 2$, $u_{min}(t) = t$ et $u_{max}(t) = 2t$.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ suffisament régulière. On considère l'équation des ondes suivante :

$$
(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u(u-1) = \varphi_1 \ \text{ dans } \mathcal{Q} = \Omega \times]0,T[, \\ u = 0 \ \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0,T[, \\ u(x,t=0) = u_0(x) \ \text{ et } \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t=0) = \varphi_2(x) \ \text{ dans } \Omega, \end{cases}
$$

où $T > 0$ est un instant final fixé, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ une fonction donnée, et $\phi(x,t) = (\varphi_1(x,t), \varphi_2(x))$ est la fonction contrôle dans $L^2(\mathcal{Q}) \times L^2(\Omega)$ sous la contrainte $\phi(x,t) \in [-m, M] \times [-m, M]$ *p.p.* (x,t) (avec m et M deux constantes strictement positives).

On admettra l'existence et l'unicité de u dans $\mathcal{D}(\mathcal{Q}) = \mathcal{C}(0,T; H_0^1(\Omega)) \times \mathcal{C}^1(0,T; L^2(\Omega))$.

On définit la fonction coût J par

$$
(7) \quad J(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (\mid \nabla u(x,t) \mid^2 + (u(x,t))^2) dx dt + \frac{\alpha}{2}\int_0^T \int_\Omega (\varphi_1(x,t))^2 dx dt + \frac{\beta}{2}\int_\Omega (\varphi_2(x))^2 dx,
$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux constantes données. On admet que J est différentiable au sens de Gâteaux. Notre problème de contrôle $(\mathcal{P}_c)$ consiste à trouver la fonction ϕ qui minimise l'objectif J sous la contrainte implicite du système (6) i.e. $u = \mathcal{F}(\phi)$.

1. Donner le gradient de J par l'utilisation du problème adjoint que l'on déterminera.
2. Donner les conditions d'optimalité caractérisant la solution ϕ^* en utilisant l'état adjoint $\tilde{u}^*$. En déduire le contrôle optimal ϕ^* en fonction de $\tilde{u}^*$, m et M.
3. Ecrire un algorithme de gradient projeté pour résoudre numériquement le problème $(\mathcal{P}_c)$. On détaillera très précisément chaque étape de l'algorithme.