Année universitaire 2023-2024
3GMA FISA

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Vendredi 26 janvier 2024 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes personnelles manuscrites,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel du module.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $t^7 e^{-t^2+t} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{t^4-5t^3+6}{t^5+t^3+1} \in \mathrm{L}^1([0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{1-\cos(t)}{t^{5/2}} \in \mathrm{L}^1([0,1])$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \in \mathrm{L}^1(]-1,1[)$

☐ $t^7 e^{-t^2+t} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{t^4-5t^3+6}{t^5+t^3+1} \in \mathrm{L}^2([0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{1-\cos(t)}{t^{5/2}} \in \mathrm{L}^2([0,1])$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \in \mathrm{L}^2(]-1,1[)$

2. Pour $a>0$, l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{1+at}$ vaut

☐ n'existe pas ☐ $\ln(1+a)$ ☐ $\ln(1+2a)$ ☐ $\dfrac{\ln(1+a)}{a}$ ☐ $\dfrac{\ln(1+2a)}{a}$ ☐ $\dfrac{\ln(1+2a)}{a} - \dfrac{1}{a}$

3. En faisant un changement en polaires, on trouve que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy$ vaut

☐ 0 ☐ -1 ☐ 1 ☐ π ☐ $\dfrac{3\pi}{2}$ ☐ $-\pi$ ☐ $-\dfrac{3\pi}{2}$ ☐ -2π ☐ 2π ☐ $+\infty$

4. La transformée de Fourier de $e^{-2|t-\frac{1}{2\pi}|}$ vaut

☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{1+\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{e^{-2i\pi\xi}}{1+\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{e^{-i\xi}}{1+\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{2e^{-i\xi}}{1+4\pi^2\xi^2}$

5. Soit $f_1(x) = x\,e^{-x^2}$ et $f_2(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.
Alors $f_1 * f_2(x)$ vaut

☐ non défini ☐ 0 ☐ $2e^{-(1+x^2)}\mathrm{sh}(x)$ ☐ $e^{-(1+x^2)}\mathrm{ch}(2x)$

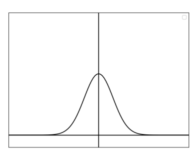
☐ $-e^{-(1+x^2)}\mathrm{ch}(2x)$ ☐ $e^{-(1+x^2)}\mathrm{sh}(2x)$ ☐ $-e^{-(1+x^2)}\mathrm{sh}(2x)$ ☐ $-2e^{-(1+x^2)}\mathrm{ch}(2x)$

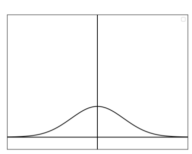
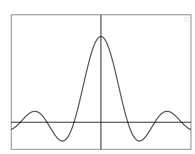
et $\widehat{f_1 * f_2}(\xi)$ vaut

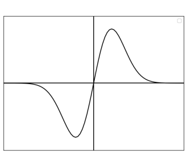
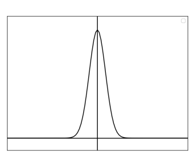
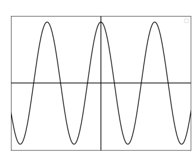
☐ non défini ☐ 0 ☐ $\dfrac{i}{2\sqrt{\pi}\pi\xi} e^{-\pi^2\xi^2} \sin(2\pi\xi)$

☐ $-ie^{-\pi^2\xi^2}\sin(2\pi\xi)$ ☐ $-i\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}\sin(2\pi\xi)$ ☐ $-2i\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}\sin(2\pi\xi)$

6. Donner l'allure de la transformée de Fourier de e^{-x^2}



☐ elle n'existe pas ☐  ☐ 

☐  ☐  ☐ 

Analyse complexe

7. On définit le logarithme complexe principal $\mathrm{Log}\,(z)$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ (le plan complexe fendu privé du demi-axe des réels négatifs) en choisissant l'argument de z dans $]-\pi,\pi[$. Asssocié à ce logarithme, on définit la fonction $z^{1/2}=e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)}$.

Soit $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $j=e^{i\pi/3}$ ☐ $j=e^{2i\pi/3}$ ☐ $j=e^{-2i\pi/3}$ ☐ $j=-e^{2i\pi/3}$

☐ $\bar{j}=j$ ☐ $\bar{j}=j^2$ ☐ $\bar{j}=-j^2$ ☐ $\bar{j}=e^{4i\pi/3}$

☐ $\left(j^2\right)^{1/2}=j$ ☐ $\left(j^2\right)^{1/2}=\bar{j}$ ☐ $\left(j^2\right)^{1/2}=e^{-i\pi/3}$ ☐ $\left(j^2\right)^{1/2}$ n'existe pas

$\mathrm{Log}(2ij)=$ ☐ $\ln 2+\frac{2\pi}{3}i$ ☐ $\ln 2+\frac{7\pi}{6}i$ ☐ $\ln 2-\frac{\pi}{6}i$ ☐ $\ln 2-\frac{5\pi}{6}i$

8. Soit $f(z)=\dfrac{1-i}{z^2-(3+i)z+2(1+i)}$.

$f(z)=$ ☐ $\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{z-1-i}$ ☐ $\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1-i}$ ☐ $\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1+i}$ ☐ $\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-1+i}$

☐ $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ ☐ $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{2,1+i\})$ ☐ $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{-2,-1-i\})$ ☐ $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{2,1-i\})$

Le développement en série entière de f en $z=0$ est donné par

☐ n'existe pas ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\tfrac{1}{2^{n+1}}+\tfrac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}\right)z^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\tfrac{1}{2^{n+1}}+\tfrac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)z^n$

☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\tfrac{1}{2^{n+1}}+\tfrac{1}{(1-i)^{n+1}}\right)z^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{2^{n+1}}-\tfrac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)z^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\tfrac{1}{2^{n}}+\tfrac{1}{(1+i)^{n}}\right)z^n$

Le rayon de convergence du développement obtenu est

$R=$ ☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ $1+i$ ☐ $2+\sqrt{2}$ ☐ $+\infty$

9. Soit $g(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(-1)^{n-1}}{n}z^n$ de rayon de convergence R.

$R=$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ -1 ☐ $+\infty$ ☐ n'existe pas

Pour $z\in D(0,R)$, la somme $g(z)$ vaut

☐ 0 ☐ $\mathrm{Log}(1+z)$ ☐ $\mathrm{Log}(1+2z)$ ☐ $\mathrm{Log}(1+\dfrac{z}{2})$ ☐ $2\mathrm{Log}(1+z)$

Pour $z\in D(0,R)$, quelles expressions ci-dessous sont égales à $g'(z)$?

☐ $g'(z)$ n'existe pas ☐ $\dfrac{2}{1+z}$ ☐ $\dfrac{1}{1+2z}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}2^n(-1)^nz^n$

☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{1+z}$ ☐ $\dfrac{2}{1+2z}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}2^{n+1}(-1)^nz^n$

Correction du DS de janvier 2024 3GMA FISA "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $t^7e^{-t^2+t}$ est continu sur $\mathbb{R}$ donc le problème d'intégrabilité ne se pose qu'en $\pm\infty$. Par croissances comparées, $|t^ke^{-t^2+t}| \underset{t\to\pm\infty}{\to} 0$ pour tout $k>0$, d'où $|t^7e^{-t^2+t}| \leq t^{-2}$ pour $|t|\geq A$ où A est assez grand, donc $t^7e^{-t^2+t} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})\cap\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
La fraction rationnelle $\frac{t^4-5t^3+6}{t^5+t^3+1}$ a un dénominateur qui ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$ (car $t^5+t^3+1\geq 1>0$ si $t\geq 0$) donc elle est continue sur $[0,+\infty[$ et le problème d'intégrabilité ne se pose qu'en $+\infty$. Mais $\left|\frac{t^4-5t^3+6}{t^5+t^3+1}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ donc, par le théorème d'équivalence, $\frac{t^4-5t^3+6}{t^5+t^3+1}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^1([0,+\infty[)$ mais est dans $\mathrm{L}^2([0,+\infty[)$.
$\frac{1-\cos(t)}{t^{5/2}}$ est clairement continu sur $]0,1]$ car le dénominateur ne s'annule qu'en 0. Pour étudier l'intégrabilité en 0, on fait un DL : $\cos(t) = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$ d'où $\left|\frac{1-\cos(t)}{t^{5/2}}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{t}}$ et $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$). Par le théorème d'équivalence, on obtient que $\frac{1-\cos(t)}{t^{5/2}} \in \mathrm{L}^1([0,1])$. Mais $\left|\frac{1-\cos(t)}{t^{5/2}}\right|^2 \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{4t}$ et cette dernière fonction n'est pas intégrable en 0 (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$). Donc $\frac{1-\cos(t)}{t^{5/2}} \notin \mathrm{L}^2([0,1])$.
La fonction $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ donc on n'a de problème d'intégrabilité qu'en ±1 où le dénominateur s'annule. L'étude en -1 et en 1 se fait de la même façon. En 1 par exemple, on a $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}$ Par un changement de variable $u = 1-t$, on se ramène à l'intégrabilité de la fonction de référence $\frac{1}{\sqrt{2u}}$ en 0 (Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2}$). On obtient que $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \in \mathrm{L}^1([0,1[)$ mais $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \notin \mathrm{L}^2([0,1[)$. On en conclut que $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est dans $\mathrm{L}^1(]-1,1[)$ mais pas dans $\mathrm{L}^2(]-1,1[)$.

2. Par un calcul direct, $I(a) = \displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{1+at} = \left[\frac{\ln(1+at)}{a}\right]_0^2 = \frac{\ln(1+2a)}{a}$.

3. Par un changement de variables en coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on a
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta)d\theta \int_0^{+\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2}dr = \int_0^{2\pi}(1-3\sin^2\theta)d\theta\left[-e^{-\frac{1}{2}r^2}\right]_0^{+\infty} = \int_0^{2\pi}(1-\tfrac{3}{2}(1-\cos(2\theta)))d\theta = -\pi.$

4. En utilisant la formule du décalage en temps pour la transformée de Fourier, on a $\widehat{e^{-2|t-\frac{1}{2\pi}|}} = e^{-i\xi}\widehat{e^{-2|t|}} = \frac{e^{-i\xi}}{1+\pi^2\xi^2}$.

5. Par définition, $f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}}(x-y)e^{-(x-y)^2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(y)dy = \int_{-1}^1(x-y)e^{-(x-y)^2}dy = \int_{x-1}^{x+1} t\,e^{-t^2}dt$ par le changement de variable $t = x-y$. Par primitivation on obtient $f_1 * f_2(x) = -(e^{-(x+1)^2}-e^{-(x-1)^2})/2 = e^{-(x^2+1)}\mathrm{sh}(2x)$.
On a $\widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1\hat{f}_2 = \widehat{xe^{-x^2}}\,\widehat{\mathbf{1}_{[-1,1]}}$. En utilisant la formule de dérivation de la transformée de Fourier pour la gaussienne, on a $\widehat{xe^{-x^2}}(\xi) = \frac{1}{-2i\pi}\widehat{e^{-x^2}}'(\xi) = \frac{1}{-2i\pi}(\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2})' = -i\sqrt{\pi}\pi\xi e^{-\pi^2\xi^2}$. D'autre part, $\widehat{\mathbf{1}_{[-1,1]}}(\xi) = 2\mathrm{sinc}(2\pi\xi)$. Finalement $\widehat{f_1 * f_2}(\xi) = -i\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}\sin(2\pi\xi)$.

6. On a $\widehat{e^{-x^2}} = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2} = \sqrt{\pi}e^{-(\frac{\xi}{1/\pi})^2}$. On voit que la transformée de Fourier d'une gaussienne d'amplitude 1 et d'écart-type 1 est une gaussienne, d'amplitude $\sqrt{\pi}>1$ (son maximum est plus grand) et d'écart-type $\frac{1}{\pi}<1$ (elle est plus étroite). Il fallait donc cocher la case du milieu en bas.

7. On a $j = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i2\pi/3}$. On a $j^2 = \left(e^{i2\pi/3}\right)^2 = e^{i4\pi/3} = e^{-i2\pi/3} = \bar{j} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et $\left(j^2\right)^{1/2} = \left(e^{-i2\pi/3}\right)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(e^{-i2\pi/3})} = e^{\frac{i}{2}(-\frac{2\pi}{3})} = e^{-i\pi/3}$. D'autre part, $\mathrm{Log}(2ij) = \mathrm{Log}(2e^{i\pi/2}e^{2i\pi/3}) = \mathrm{Log}(2e^{7i\pi/6}) = \ln|2e^{7i\pi/6}| + i\mathrm{Arg}(2e^{7i\pi/6}) = \ln(2)-i\frac{5\pi}{6}$. Il y avait donc 5 cases à cocher : la 2, 6, 8, 11 et 16.

8. Une simple mise sur le même dénominateur donne $\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1-i} = \dfrac{1-i}{(z-2)(z-1-i)} = f(z)$, qui est une fraction rationnelle dont le dénominateur s'annule exactement en $z=2$ et en $z=1+i$, d'où $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{2,1+i\})$. La fonction f étant holomorphe en 0, on peut la développer en série entière en $z=0$:

$$f(z) = \frac{-1}{2-z}+\frac{1}{1+i-z} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\frac{z}{1+i}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{1+i}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)z^n.$$

Le rayon de convergence de la série entière est le rayon du plus grand disque centré en 0 qui est inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathbb{C}\setminus\{2,1+i\}$ de f soit la distance de 0 à $1+i$ qui est $\sqrt{2}$.

9. Si $a_n = \frac{2^n(-1)^{n-1}}{n}$, on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2n}{n+1} \to 2$ quand $n\to+\infty$. Par le critère de d'Alembert, on en déduit $R = \frac{1}{2}$.
On a $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(2z)^n = \mathrm{Log}(1+2z)$ d'après les formules du cours.
Dans le disque de convergence $D(0,\frac{1}{2})$, on peut soit dériver l'expression de la somme obtenue, soit dériver directement la série entière. On trouve $g'(z) = \dfrac{2}{1+2z} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n2^n(-1)^{n-1}}{n}z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}2^{n+1}(-1)^nz^n$ (2 cases à cocher).