Année universitaire 2022-2023
Tronc Commun 3ème année - GMA FISA

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Mardi 8 novembre 2022 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes personnelles manuscrites,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel du module.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\dfrac{t^3+7t}{t^4+t^2+1} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $e^{5t-t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\sin(t)}{t} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$

☐ $\dfrac{t^3+7t}{t^4+t^2+1} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $e^{5t-t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\sin(t)}{t} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1-x^n}{2}\right)^4 dx$ quand $n \to +\infty$?

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{32}$ ☐ $\dfrac{1}{16}$ ☐ $\dfrac{1}{8}$ ☐ $\dfrac{1}{4}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $+\infty$

3. En faisant un changement en polaires, on trouve que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$ vaut

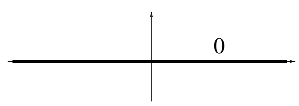
☐ 0 ☐ -1 ☐ 1 ☐ π ☐ $\dfrac{3\pi}{2}$ ☐ $-\pi$ ☐ $-\dfrac{3\pi}{2}$ ☐ -2π ☐ 2π ☐ $+\infty$

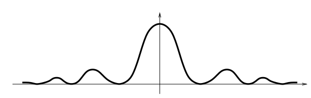
4. La transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]} + \mathbb{1}_{[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}]}$ vaut

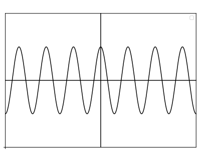
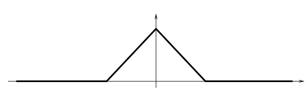
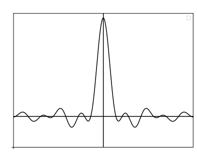
☐ n'existe pas ☐ $\dfrac{2}{\pi\xi}\sin(5\xi)\cos(3\xi)$ ☐ $\dfrac{2}{\pi\xi}\sin(\dfrac{5\xi}{2})\cos(\dfrac{3\xi}{2})$

☐ 0 ☐ $-\dfrac{2}{\pi\xi}\sin(5\xi)\cos(3\xi)$ ☐ $\dfrac{2}{\pi\xi}\sin(5\xi)\cos(6\xi)$

5. L'allure de la tranformée de Fourier de la question précédente est

☐ Elle n'existe pas ☐ 

☐ 

☐  ☐  ☐ 

6. Soit $f(x) = e^{-x^2}$ Alors $\widehat{f*f}(\xi)$ vaut

☐ n'existe pas ☐ $\sqrt{\pi}e^{-2\pi^2\xi^2}$ ☐ $\pi e^{-2\pi^2\xi^2}$ ☐ $\pi^2 e^{-\pi^4\xi^4}$

☐ $e^{-2\xi^2}$ ☐ $\pi e^{-\pi^2\xi^2}$ ☐ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-\pi^2\xi^2/2}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2/2}$

7. La transformée de Fourier de $\dfrac{t}{1+t^2}$ vaut

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $i\pi\, e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi|\xi|}$

☐ $-i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)e^{-\pi|\xi|}$ ☐ $-i\pi\,\mathrm{sgn}(-\xi)e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $i\pi\,\mathrm{sgn}(-\xi)e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $+\infty$

Analyse complexe

8. Soit $f(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} z^n$ de rayon de convergence R.

$R =$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ -1 ☐ $+\infty$ ☐ n'existe pas

$f(0) =$ ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $+\infty$ ☐ n'est pas défini

9. Pour $z \in D(0, R)$, quelles expressions ci-dessous sont égales à $f'(z)$?

☐ $f'(z)$ n'existe pas ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} z^n$ ☐ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$

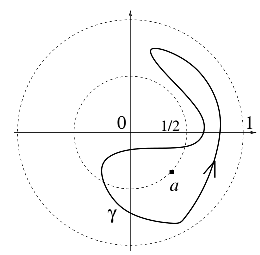
☐ $-\mathrm{Log}(1+z)$ ☐ $\mathrm{Log}(1+z)$ ☐ $\mathrm{Log}(z)$ ☐ $\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z}$

10. Pour $z \in D(0, R)$, quelles expressions ci-dessous sont égales à $f(z)$?

☐ $z\,\mathrm{Log}(z) - z$ ☐ $z\,\mathrm{Log}(z) - z + 1$ ☐ $(1+z)\,\mathrm{Log}(1+z) - (1+z)$

☐ $(1+z)\,\mathrm{Log}(1+z) - z$ ☐ $-(1+z)\,\mathrm{Log}(1+z) + z$ ☐ $\mathrm{Log}(1+z)$

11. Soit γ le chemin représenté sur le dessin ci-contre et $a = \frac{1}{2} e^{i7\pi/4}$. Alors



$\int_\gamma f(z)dz =$ ☐ non définie ☐ 0 ☐ 1 ☐ $2\pi i$ ☐ $-2\pi i$ ☐ $2\pi i f(a)$

$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz =$ ☐ non définie ☐ 0 ☐ $f(a)$ ☐ $-f(a)$ ☐ $f'(a)$ ☐ $-f'(a)$

12. Le développement en série entière de la fonction $g(z) = \frac{1}{z-4}$ *au voisinage de* $z = i$ est :

☐ il n'existe pas ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4-i)^{n+1}} (z-i)^n$ ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(4-i)^{n+1}} (z-i)^n$

☐ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4-i)^{n+1}} (z-i)^n$ ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(4-i)^n} (z-i)^n$ ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(4-i)^{n+1}} z^n$.

13. Le rayon de convergence de la série entière obtenue dans la question 12 est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{5}$ ☐ 4 ☐ $\sqrt{10}$ ☐ $\sqrt{17}$ ☐ $+\infty$.

Correction du DS de novembre 2022 3GMA FISA "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. La fraction rationnelle $t \mapsto \frac{t^3+7t}{t^4+t^2+1}$ dont le dénominateur ne s'annule pas est continue sur $\mathbb{R}$ donc on n'a de problème d'intégrabilité qu'en $\pm\infty$. Mais $\left|\frac{t^3+7t}{t^4+t^2+1}\right| \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ donc $\frac{t^3+7t}{t^4+t^2+1}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ mais est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

La fonction $t \mapsto e^{5t-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on n'a de problème d'intégrabilité qu'en $\pm\infty$. On a $|e^{5t-t^2}| = |e^{5t-t^2/2}||e^{-t^2/2}| \leq e^{-t^2/2}$ pour $|t|$ assez grand car $e^{5t-t^2/2} \underset{t\to\pm\infty}{\to} 0$. Comme $e^{-t^2/2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on en déduit par comparaison que e^{5t-t^2} est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

La fonction $\frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais $\frac{\sin(t)}{t} \notin \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ (cf. cours et TD). Comme $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|^2 \leq \frac{1}{t^2}$ sur $]1, +\infty[$, $\frac{\sin(t)}{t} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0, 1[$ donc on n'a un problème d'intégrabilité qu'en 1. Par un changement de variable $u = 1 - t$, on se ramène à l'intégrabilité de la fonction de référence $u \mapsto \sqrt{u}$ sur $[0, 1]$ (Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2}$). On en conclut que $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est dans $\mathrm{L}^1(]0, 1[)$ mais pas dans $\mathrm{L}^2(]0, 1[)$.

2. $f_n(t) = \left(\frac{1-x^n}{2}\right)^4$ est continue sur $[0, 1]$ et $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ p.p. sur $[0, 1]$ car $x^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ p.p. sur $[0, 1]$. D'autre part, on a l'hypothèse de domination $|f_n(t)| \leq \frac{1}{16} \in \mathrm{L}^1([0, 1])$. Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{16} dt = \frac{1}{16}$.

3. Par un changement de variables en coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on a
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} (3\cos^2\theta - \sin^2\theta) d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr = \int_0^{2\pi} (4\cos^2\theta - 1) d\theta \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4\frac{1+\cos(2\theta)}{2} - 1) d\theta = \pi.$$

4. Le signal dont on demande de calculer la transformée de Fourier est la somme de 2 créneaux centrés. Sa transformée est donc la somme de 2 sinus cardinaux de fréquences différentes : $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]} + \mathbb{1}_{[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}]})(\xi) = \frac{1}{\pi}\mathrm{sinc}(\xi) + \frac{4}{\pi}\mathrm{sinc}(4\xi) = \frac{2}{\pi\xi} \sin(\frac{5\xi}{2}) \cos(\frac{3\xi}{2})$ en utlisant les formules de trigonométrie usuelles.

5. D'après la question précédente, la transformée de Fourier existe dans $L^1(\mathbb{R})$ et est réelle car c'est la transformée d'une fonction paire. En particulier c'est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. D'après 4, c'est un produit amorti de cosinus et sinus (qui n'est pas toujours positif) ; il n'y a qu'un seul signal qui satisfait toutes ces propriétés.

6. La gausienne $f(x) = e^{-x^2}$ est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ donc $f * f$ est également dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et d'après le cours et le tableau des transformées usuelles, on a $\widehat{f * f}(\xi) = (\hat{f}(\xi))^2 = (\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2})^2 = \pi e^{-2\pi^2\xi^2}$.

7. D'après le tableau des transformées usuelles, on obtient $\mathcal{F}\left(\mathrm{sgn}(t)e^{-2\pi|t|}\right) = \dfrac{-i}{\pi}\dfrac{\xi}{1+\xi^2}$. Par inversion dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on obtient $\mathcal{F}\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)(\xi) = i\pi\,\mathcal{F}\mathcal{F}\left(\mathrm{sgn}(t)e^{-2\pi|t|}\right)(\xi) = i\pi\,\mathrm{sgn}(-\xi)e^{-2\pi|-\xi|} = i\pi\,\mathrm{sgn}(-\xi)e^{-2\pi|\xi|}$.

8. $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $a_0 = a_1 = 0$ et, pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$. Pour $n \geq 2$, on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n(n-1)}{(n+1)n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ donc $R = \frac{1}{1} = 1$. Par ailleurs $f(0) = 0$ car $a_0 = 0$.

9. D'après le cours, f est holomorphe dans le disque de convergence $D(0, 1)$ et $\forall z \in D(0, 1)$, on a $f'(z) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \mathrm{Log}(1 + z)$ où Log désigne le logarithme principal défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et donc en particulier $\mathrm{Log}(1 + z)$ est défini dans $D(0, 1)$.

10. La primitive, définie à une constante C près, de $\mathrm{Log}(1 + z)$ dans $D(0, 1)$ est $(1 + z)\mathrm{Log}(1 + z) - z + C$. Comme $f(0) = 0$, $C = 0$ et $f(z) = (1 + z)\mathrm{Log}(1 + z) - z$.

11. f est holomorphe dans le disque de convergence $D(0, 1)$ et le chemin γ entoure un compact à bord inclus dans $D(0, 1)$ donc $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ d'après le théorème de Cauchy. Ensuite, d'après la formule de Cauchy, $\frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a)$ puisque a est dans le compact à bord bordé par γ.

12. $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{4\})$ donc g est développable en série entière en $z = i$ et on a :
$$g(z) = \frac{-1}{4-i-(z-i)} = \frac{-1}{4-i}\frac{1}{1-\frac{z-i}{4-i}} = \frac{-1}{4-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{4-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{(4-i)^{n+1}}(z-i)^n.$$

13. Le rayon de convergence R est le rayon du plus grand disque ouvert de centre i inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{4\})$ de g, soit $R = |i - 4| = \sqrt{17}$ (distance de i à 4). On pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert avec le développement obtenu dans la question précédente.