

## Intégration

**Exercice 1** Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur  $\mathbb{R}$  ? Leurs carrés sont-ils intégrables ?

$$f_1(x) = e^{-x^2} \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 2** Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

- Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt$  existe. [Intégrer par parties.]
- En déduire que  $f \notin L^1([1, +\infty[)$ .  
[Considérer la fonction  $x \mapsto f(x) \sin(x)$  et utiliser 1.]
- Démontrer que  $f \in L^2([1, +\infty[)$ .

**Exercice 3** Étudier la limite, quand  $n \rightarrow +\infty$ , des intégrales suivantes

$$\int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx, \quad \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2 + \cos(x)}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx, \quad \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha > 1.$$

[INDICATIONS. 1: Intégrer par parties. 2: Appliquer Beppo-Levi. 3: Appliquer la convergence dominée. Pour 4, on pourra utiliser l'inégalité  $\forall u \geq 0, \ln(1 + u) \leq u$ .]

**Exercice 4** On veut calculer  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

$$\text{Soit } F \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx.$$

- En utilisant les théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe intégral, démontrer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Démontrer que

$$F'(t) = -2Ie^{-t^2} \quad \text{pour tout } t \in ]0, +\infty[.$$

- En intégrant l'égalité précédente, démontrer que

$$F(T) - F(t) = -2I \int_t^T e^{-x^2} dx \quad \text{pour tous } 0 \leq t < T.$$

- Démontrer que  $F(t) = 2I \int_t^{+\infty} e^{-x^2} dx$  et en déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 5**

- Démontrer que si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  avec  $\int_{\mathbb{R}} |f * g(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx$ .
- Démontrer que si  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f * g(x)| \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt}$ .

## Transformation de Fourier

On rappelle la liste des **transformées de Fourier usuelles**. Dans ce qui suit,  $\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(x)$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  (qui vaut 1 si  $x \in [\alpha, \beta]$  et 0 sinon),  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$  est le sinus cardinal,  $H$  est la fonction d'Heaviside (qui vaut 1 si  $x \geq 0$  et 0 sinon) et  $\text{sgn}(x)$  est la fonction signe (qui vaut  $-1$  si  $x < 0$  et  $1$  si  $x > 0$ ).

Le nombre  $a$  est un complexe tel que  $\text{Re}(a) > 0$ ,  $k$  est un entier positif et  $\omega$  un réel tel que  $\omega > 0$ .

Fonction $f : x \mapsto f(x)$	Transformée de Fourier $\hat{f} : \xi \mapsto \hat{f}(\xi)$
$\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(x)$	$(\beta - \alpha) e^{-i(\alpha + \beta)\pi\xi} \text{sinc}((\beta - \alpha)\pi\xi)$
$H(x)e^{-ax}$	$\frac{1}{a + 2i\pi\xi}$
$H(-x)e^{ax}$	$\frac{-1}{-a + 2i\pi\xi}$
$e^{-a x }$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$
$\text{sgn}(x)e^{-a x }$	$\frac{-4i\pi\xi}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$
$H(x)\frac{x^k}{k!}e^{-ax}$	$\frac{1}{(a + 2i\pi\xi)^{k+1}}$
$H(-x)\frac{x^k}{k!}e^{ax}$	$\frac{-1}{(-a + 2i\pi\xi)^{k+1}}$
$\frac{1}{a + 2i\pi x}$	$H(-\xi)e^{a\xi}$
$\frac{1}{a - 2i\pi x}$	$H(\xi)e^{-a\xi}$
$e^{-\omega x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-\frac{\pi^2}{\omega}\xi^2}$
$\text{sinc}(x)$	$\pi \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(\xi)$

**Exercice 6** Recalculer les transformées de Fourier de la colonne de droite du tableau en précisant à chaque fois s'il s'agit d'une transformée dans  $L^1(\mathbb{R})$  ou dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

[INDICATIONS (le numéro désigne la ligne du tableau). 1,2: calcul direct. 3,4,5: se déduit de 2 avec des propriétés du cours. 6,7: calcul avec des propriétés du cours. 8,9: par inversion. 10: utiliser une équation différentielle, cf. cours. 11: par inversion.]

**Exercice 7** Soit  $a > 0$  et  $f_a(t) = \frac{\pi}{a} \mathbf{1}_{\left[\frac{-a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi}\right]}(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

1. Calculer la transformée de Fourier de  $f_a$  (à l'aide du tableau).
2. Calculer la transformée de Fourier du produit de convolution  $f_a * f_a$ .
3. En déduire la transformée de Fourier de la fonction  $h(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$  ainsi que la valeur de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx$ .

**Exercice 8** Calculer la valeur de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2} dx$ ,  $\omega > 0$ .  
[INDICATION: on pourra utiliser la 4ème ligne du tableau.]

**Exercice 9** Résolution d'équations différentielles avec la transformée de Fourier.  
La transformation de Fourier permet de résoudre des équations différentielles suivant le principe suivant :

équation différentielle  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  équation plus simple  $\rightarrow$  solution  $\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$  solution équation différentielle

En particulier, lorsque l'équation différentielle est une EDO linéaire à coefficients constants d'inconnue  $f$ , on est ramené à résoudre une équation algébrique pour trouver  $\hat{f}$  qui s'exprimera alors comme un produit dans l'espace de Fourier. Ainsi, la solution  $f$  s'écrira comme un produit de convolution.

1. Utiliser la méthode ci-dessus pour résoudre l'EDO  $-f''(t) + f(t) = e^{-t^2}$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Retrouver le résultat précédent en résolvant l'EDO avec la méthode de variations des constantes.

## Analyse complexe

**Exercice 10** On note  $\log$  le logarithme complexe principal défini dans le demi-plan fendu  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  avec des arguments à valeurs dans  $] -\pi, \pi[$ . Soit  $z = \frac{-1-i}{\sqrt{3}+i}$ . Déterminer module et argument de  $z$ . Calculer  $z^3$ ,  $\text{Log}(z)$ ,  $z^{1/2}$  et  $z^{2/3}$ .

**Exercice 11** Les fonctions ci-dessous sont-elles holomorphes sur  $\mathbb{C}$  (ou une partie de  $\mathbb{C}$ )?

$$f_1(z) = z^2 \quad f_2(z) = \text{Re}(z) \quad f_3(z) = \bar{z} \quad f_4(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}.$$

**Exercice 12** Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes et calculer la somme pour les 2 premières.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)z^n \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n!z^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

**Exercice 13** Développer en série entière les fonctions suivantes et indiquer les domaines de convergence des séries obtenues.

$$f_1(z) = \frac{z^2}{1+z} \text{ en } z=0 \text{ et en } z=i, \quad f_2(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ en } z=0, \quad f_3(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \text{ en } z=0.$$

**Exercice 14** Calculer  $\int_{\gamma} \omega$  dans les cas suivants.

- $\omega = \text{Im}(z)dz$  et  $\gamma$  est le demi-cercle trigonométrique supérieur.
- $\omega = \bar{z}^m dz$  et  $\gamma$  est le cercle trigonométrique,  $m \in \mathbb{Z}$ .
- $\omega = \text{Re}(z)dz$  et  $\gamma$  est le triangle  $[-i, 1-i, 1+i, -i]$ .

**Exercice 15** Étudier les singularités des fonctions suivantes et calculer les résidus correspondants.

$$f_1(z) = \frac{z}{z^2 + 2z - 3} \quad f_2(z) = \frac{\exp(i\pi z)}{(z+2)^3} \quad f_3(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

**Exercice 16** Calculer les intégrales suivantes ( $C^+(0, R)$  désigne le cercle de centre 0 et de rayon  $R$  parcouru dans le sens trigonométrique).

$$I_1 = \int_{C^+(0, R)} \frac{\cos z}{z(z-1)} dz \text{ pour } R > 0 \quad I_2 = \int_{C^+(0, 3)} \frac{\exp(2z)}{(z+1)^4} dz$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \sin \theta} \quad I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$$

$$I_5 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \quad I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + 1} dx, \quad \omega > 0.$$

*Solutions :*  $I_1 = -2i\pi$  pour  $0 < R < 1$ ;  $I_1$  non défini pour  $R=1$ ;  $I_1 = 2i\pi(\cos(1) - 1)$  pour  $R > 1$ .  
 $I_2 = (8i\pi)/(3e^2)$ .  $I_3 = 2\pi/\sqrt{3}$ .  $I_4 = -\pi/3$ .  $I_5 = \pi/2$ .  $I_6 = \pi e^{-\omega/2}$ .