Mécanique du point (non relativiste)

Préparation au CAPES

18 septembre 1997

I – Cinématique

1. Soit $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée directe. Rappeler brièvement ce que l'on entend par « base », par « orthonormée » et par « directe ». Soient deux vecteurs

$$\vec{V} = (x, y, z)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{V'} = (x', y', z')_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} .$$

Rappeler la définition du produit vectoriel $\vec{V} \wedge \vec{V'}$. Quelle relation y a-t-il entre $\vec{V} \wedge \vec{V'}$ et $\vec{V'} \wedge \vec{V}$? Calculer $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$, $\vec{\imath} \wedge \vec{k}$, $\vec{\jmath} \wedge \vec{k}$.

Soit θ l'angle (algébrique) $(\widehat{\vec{V}, \vec{V'}})$. Montrer qu'en choisissant bien la base $\mathcal{B}$ on peut démontrer que

$$||\vec{V} \wedge \vec{V'}|| = ||\vec{V}|| \, . \, ||\vec{V'}|| \, . \, |\sin(\theta)| \, .$$

Préciser alors l'interprétation géométrique du produit vectoriel. Que dire alors de deux vecteurs dont le produit vectoriel est nul ?

Mettre en évidence les analogies et les différences entre le produit vectoriel et le produit scalaire.

2. a) Après avoir choisi un repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans le plan, rappeler la définition des coordonnées polaires ainsi que celle des vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associés. Exprimer $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ en fonction de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et réciproquement. De quelle(s) coordonnée(s) dépendent les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$? Calculer les vecteurs $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$, $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$.

b) Soit la trajectoire d'un point M dans le plan donnée par

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} = r(t)\vec{u}_r$$

On appelle $\mathcal{R}_p$ le référentiel lié au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Calculer dans $\mathcal{R}_p$ la dérivée par rapport au temps de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$. En déduire les composantes de la vitesse et de l'accélération de M vues dans $\mathcal{R}_p$ dans les bases $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. À quoi se réduisent ces expressions pour un mouvement circulaire de centre O et de rayon R ? Même question pour un mouvement circulaire uniforme de centre O, de rayon R et de vitesse angulaire ω.

c) Soit $\mathcal{R}$ le référentiel lié au repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On appelle $\mathcal{R}'$ le référentiel lié au repère $(O; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ tournant à la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ autour de l'axe $(O; \vec{k})$.

Après avoir rappelé l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$, retrouver la formule de Bour ainsi que celles de composition des vitesses et des accélérations dans ce cas particulier (référentiel tournant). On se servira des résultats établis au b).

3. Une roue verticale de rayon a et de centre O_1 roule sans glisser sur un plan horizontal autour d'un axe vertical fixe Oz de façon à ce que O_1 décrive un cercle de centre O de rayon R avec une vitesse angulaire constante ω. On considère à un instant fixé le point M le plus haut de la roue. Caractériser en fonction des données, les vecteurs vitesse et accélération de M par rapport au référentiel fixe.

4. Une rivière rectiligne de largeur constante s'écoule à une vitesse uniforme et constante. Un nageur la traverse avec une vitesse observée dans le référentiel lié à l'eau qui est constante et perpendiculaire à la rivière. Déterminer en quel point de l'autre rive parvient le nageur.

5. a) Un marcheur se déplace à une vitesse constante horizontale par rapport au sol. Une pluie tombe verticalement à vitesse constante. Montrer que le marcheur a intérêt à incliner son parapluie d'un angle que l'on déterminera s'il veut être mouillé le moins possible.

b) On suppose que la Terre décrit une orbite circulaire autour du Soleil S. Un astronome observe une étoile fixe par rapport au Soleil située à une distance quasi-infinie sur l'axe passant par S perpendiculaire au plan de l'écliptique. Montrer que l'astronome observe qu'au cours d'une année, l'étoile décrit un cercle dont on calculera l'angle apparent.

A.N. : Donner un ordre de grandeur de cet angle sachant que le rayon de l'orbite terrestre est approximativement de 150 millions de kilomètres.

II – Dynamique non galiléenne

1. Un wagon de masse M se déplace sans frottements sur une voie rectiligne horizontale liée à un référentiel galiléen (la verticale est définie par le champ de pesanteur uniforme et constant $\vec{g}$).

a) Dans un premier temps, on suppose que le wagon a une vitesse initiale $\vec{v}_0$ et qu'il n'est soumis à aucune force extérieure autre que son poids et la réaction des rails. Soit O un observateur lié à la voie et O' un observateur fixe par rapport au wagon. O et O' mesurent les abscisses le long de la voie à l'aide des repères $(O; \vec{\imath})$ et $(O'; \vec{\imath})$ respectivement.

Si le référentiel lié à O est galiléen, en est-il de même pour celui lié à O' ? On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, les abscisses de O et O' coincident. Quelle relation existe-t-il entre les abscisses x et x' d'un même point mesurées par O et O' respectivement ?

O' lâche sans lancer une petite bille de masse m à une hauteur h mesurée à partir du plancher du wagon.

Décrire, en négligeant les frottements de l'air, le mouvement de la bille vu par O. Le comparer au mouvement vu par O'.

b) Le wagon est maintenant soumis à la traction d'une locomotive qui exerce sur lui une force $\vec{F}$ horizontale et constante. Décrire le mouvement du wagon par rapport à O. Si le référentiel lié à O est galiléen, en est-il de même pour celui lié à O' ?

La bille m est maintenant suspendue au plafond du wagon par une tige rigide de masse négligeable. Déterminer la position d'équilibre stable de la bille dans le référentiel du wagon. Si la masse est effectivement dans cette position d'équilibre, écrire l'équation de son mouvement vu par O.

2. Une masse ponctuelle m est placée sur un plateau horizontal ; ce plateau est animé par rapport au sol d'un mouvement sinusoïdal vertical décrit par l'équation : $z = a\cos(\omega t)$. On désigne par g l'intensité de la pesanteur. Quelle condition doit satisfaire ω pour que le point ne quitte pas le plateau ?

A.N. : Calculer la fréquence critique pour $a = 5$ cm et $g = 10$ ms^{-2}.

3. Un manège pour enfants tourne à une vitesse angulaire constante $\omega > 0$. Le propriétaire P de masse M parcourt la plate-forme pour ramasser les tickets.

a) Montrer que P doit exercer une force $\vec{F}$ sur la plate-forme pour se maintenir immobile par rapport à elle à une distance r de son centre. On précisera les caractéristiques (module, sens) de $\vec{F}$.

b) Dans le référentiel tournant de la plate-forme, P part du centre et parcourt un rayon avec une vitesse constante $\vec{v}_0$. Caractériser la force $\vec{F}$ que doit exercer maintenant P pour réaliser ce mouvement.

c) Même question qu'au b) lorsque, dans le référentiel tournant, P se déplace sur un cercle concentrique à la plate-forme de rayon r, à une vitesse de module constant v_0.

4. Un cerceau tourne à une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical passant par son centre. Un petit anneau de masse m coulisse sans frottements sur le cerceau. Déterminer la ou les positions d'équilibre de la masse dans le référentiel du cerceau.

5. Dans tout l'exercice on considèrera la Terre comme une sphère de rayon $R = 6400$ km de masse $M = 6.10^{24}$ kg. Rappeler la définition du référentiel de Copernic que l'on supposera Galiléen. Pourquoi, en toute rigueur, un référentiel lié à un laboratoire terrestre n'est-il pas lui aussi Galiléen ?

a) Rappeler comment l'on définit le poids d'un corps sur la Terre. Montrer à l'aide d'une figure, qu'avec cette définition, l'intensité de la pesanteur g dépend de la latitude λ. Sans calcul comparer les valeurs de g aux pôles et à l'équateur.

Préciser la fonction $g(\lambda)$. Quelle est la variation relative maximale de g lorsque l'on parcourt toutes les latitudes ?

Faire l'application numérique en prenant une durée du jour sidéral égale à 86 164 s et sachant que la constante universelle de gravitation vaut $6,672.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}. Comment expliquer que la valeur de la variation de g mesurée expérimentalement est notablement plus élevée que celle fournie par l'approche précédente ?

b) Expliquer qualitativement la déviation par rapport à la verticale d'une masse en chute libre lâchée sans vitesse initiale d'une tour d'une centaine de mètres de hauteur. La direction de déviation dépend-elle de l'hémisphère dans lequel on se trouve ?

III – Dynamique galiléenne

Après avoir vu, au II, comment les forces d'inertie pouvaient affecter le mouvement dans un référentiel non galiléen, on veut, dans toute cette partie, étudier l'influence sur le mouvement des forces non inertielles, c'est à dire provenant de l'interaction entre corps. Dans toute cette partie, on considèrera que le référentiel terrestre est galiléen sachant que cette approximation ne suffit plus à expliquer certains effets très fins comme la déviation vers l'est d'un projectile en chute libre, ou comme les marées.

1. Une goutte d'eau de masse et de forme constante tombe sans tourner verticalement dans le champ de pesanteur uniforme. L'air exerce sur elle un frottement proportionnel à sa vitesse (frottement fluide). Après avoir écrit la relation fondamentale de la dynamique, montrer que la goutte atteint une vitesse limite que l'on précisera.

2. Une voiture de masse M suit une trajectoire rectiligne sur sol horizontal à une vitesse constante v_0 jusqu'à un instant t_0 où le conducteur aperçoit un mur (perpendiculaire à v_0). A t_0 la voiture se trouve à une distance D du mur. On suppose pour simplifier que seulement deux choix s'offrent au conducteur :

1° Soit ce dernier freine en bloquant les roues (la voiture n'a pas de système ABS !) tout en gardant une trajectoire rectiligne.

2° Soit il tourne sans freiner sur une trajectoire circulaire pour essayer d'éviter le mur.

On supposera que la nature du contact des roues sur le sol est telle que *dans les deux cas* la force de frottement a une norme constante proportionnelle d'un facteur f au poids de la voiture (frottement solide). On notera g l'intensité de la pesanteur.

Quelle est parmi les affirmations suivantes celle qui est juste ?

A) Quelles que soient les valeurs des paramètres (M, g, f, v_0, D) le choix 1° est le meilleur parce que dans ce cas la distance parcourue en direction du mur est toujours la plus courte.

B) Quelles que soient les valeurs des paramètres (M, g, f, v_0, D) le choix 2° est le meilleur parce que la distance parcourue en direction du mur est toujours la plus courte dans ce cas.

C) Quelles que soient les valeurs des paramètres (M, g, f, v_0, D) les deux choix sont équivalents : la distance parcourue en direction du mur est la même.

D) Si v_0 est suffisamment faible il faut choisir 1° sinon c'est 2° qui s'impose.

E) Si v_0 est suffisamment faible il faut choisir 2° sinon c'est 1° qui s'impose.

3. Un athlète lance à $t = 0$ un poids de masse m à la vitesse $\vec{v}_0$. L'altitude de départ est h et l'on suppose que le sol est horizontal. On fait l'hypothèse qu'après le lancement le poids n'est soumis qu'à la pesanteur supposée uniforme et constante : $\vec{g}$.

a) Montrer que le mouvement du poids s'effectue dans un plan que l'on déterminera.

b) Montrer qu'à h et $||\vec{v}_0||$ fixés, le poids parcourt une distance horizontale maximale pour une direction bien choisie de $\vec{v}_0$. On pourra par commodité introduire la quantité sans dimension $\alpha = 2h||g||/||\vec{v}_0||^2$.

4. Faire l'étude générale du mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique constant et uniforme. Cette étude permet-elle de comprendre complètement le mouvement d'un électron dans un fil conducteur soumis à une force électromotrice continue ?

5. Pour décrire le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et constant quel(s) système(s) de coordonnées vous paraî(ssen)t particulièrement adapté. Écrire dans ce(s) système(s) les équations du mouvement. Montrer que l'on peut décomposer le mouvement en un mouvement longitudinal parallèle au champ magnétique et un mouvement transversal. Pour ce dernier on fera apparaître la fréquence cyclotron. Décrire alors la trajectoire. À quelle(s) condition(s) le mouvement reste-t-il dans un plan ?