UNIVERSITÉ FRANCOIS RABELAIS - TOURS
École Doctorale : Sciences-Santé-Technologie
Année universitaire : 2007-2008

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TOURS

Discipline : **Mathématiques**

préparée et soutenue publiquement par

Julien LOIZELET

Le 23 Juin 2008

TITRE :

Problèmes globaux en relativité générale

Directeur de thèse :

Piotr CHRUŚCIEL

JURY

Piotr CHRUŚCIEL	*Professeur à l'Université de Tours*
Mihalis DAFERMOS	*Professeur à l'Université de Cambridge, Angleterre*
Erwann DELAY	*Maître de conférences (HDR) à l'Université d'Avignon*
Jean-Philippe NICOLAS	*Professeur à l'Université de Brest*
Laurent VERON	*Professeur à l'Université de Tours*

Remerciements

Tout d'abord, mon estime et mes remerciements vont à Monsieur Piotr Chruściel, qui m'a fait l'honneur de m'initier à la recherche en dirigeant mes travaux et qui s'est toujours montré disponible et patient tout au long de la réalisation de cette thèse. Je voudrais ici lui exprimer toute ma gratitude pour les différents échanges et discussions que nous avons eus et qui m'ont sans cesse permis d'avancer dans la résolution des nombreux problèmes rencontrés.

J'adresse ma plus sincère reconnaissance à Messieurs Jean-Philippe Nicolas et Alan Rendall pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'être les rapporteurs de ma thèse. Je les remercie pour leurs commentaires et suggestions qui m'ont permis d'en améliorer la rédaction.

Je remercie également Messieurs Mihalis Dafermos, Erwann Delay et Laurent Véron qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

Merci à tous mes camarades de bureau, doctorants et ex-doctorants, pour la très bonne ambiance qu'ils ont fait régner durant ces années. Je tiens aussi à remercier tous les membres du Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique de l'Université de Tours ainsi que les personnels techniques, et tout particulièrement Mesdames Anne-Marie Chenais et Bernadette Vallée, pour leur compétence et leur gentillesse.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis, qui ont su me soutenir et m'encourager tout au long de cette période.

Table des matières

1 Introduction

On constate un intérêt croissant pour l'étude des solutions asymptotiquement euclidiennes des équations d'Einstein en dimensions supérieures, cf.[2, 5, 7, 8]. Les premiers travaux sur le sujet de D.Christodoulou et S.Klainerman, cf. [4], prouvant la stabilité non linéaire de l'espace de Minkowski à quatre dimensions utilisent les équations de Bianchi et, de ce fait, ne se généralisent pas de façon évidente pour des dimensions plus grandes que quatre. L'existence globale sur $\mathbb{R}^{n+1}$, avec $n \geq 4$, pour des données initiales suffisamment petites, de solutions de système d'équations d'ondes quasi-linéaires du type des équations d'Einstein en coordonnées harmoniques, a été prouvée dans [10, 13] (voir aussi [3] pour $n \geq 5$ impair) avec des conditions de décroissance des données initiales incompatibles avec les équations de contraintes. Dans [14], H.Lindblad et I.Rodnianski ont prouvé l'existence de solutions globales des équations d'Einstein couplées à un champ scalaire, quand $n = 3$, pour des données initiales C^∞ suffisamment petites et asymptotiquement euclidiennes, en choisissant de travailler avec la jauge harmonique (1.4).

Le but de ce travail est de montrer (cf. sections 2 à 9), en utilisant à la fois la jauge harmonique (1.4) et la jauge de Lorenz (1.5), l'existence de solutions globales des équations d'Einstein-Maxwell avec des données initiales petites , en dimension d'espace $n \geq 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \ , \\ D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \ . \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Ces équations donnent une relation entre le tenseur gravitationnel $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ (exprimé en fonction de la courbure de Ricci $R_{\mu\nu}$ et de la courbure scalaire $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ d'une métrique Lorentzienne $g_{\mu\nu}$ inconnue) et le tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(\mathcal{F}_{\mu\lambda}\mathcal{F}_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\lambda\rho}\mathcal{F}_{\lambda\rho})$ d'un champ électromagnétique $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A étant une 1-forme ($(n+1)$-potentiel électromagnétique). On peut noter que $G_{\mu\nu}$ ne dépend que de la géométrie alors que $T_{\mu\nu}$ est déterminé par le contenu physique de l'espace-temps. Ces équations sont une généralisation [1] directe des équations en dimension $n+1 = 4$.

On considère alors le problème de Cauchy suivant : on se donne une variété Σ_0 (de dimension n) avec une métrique Riemannienne g_0, un 2-tenseur symétrique k_0 et des données initiales ($A^0 = A_i^0 dx^i, E^0 = E_i^0 dx^i$) pour le champ électromagnétique. On veut trouver une variété $\mathcal{M}$ (de dimension $n + 1$) avec une métrique Lorentzienne g et un potentiel électromagnétique A qui vérifient (1.1) telle que Σ_0 soit plongé dans $\mathcal{M}$, g_0 soit la restriction de g sur Σ_0 , k_0 soit la seconde forme fondamentale de Σ_0 dans $\mathcal{M}$ et que

1. On pourra consulter l'annexe 11.1 pour voir que l'expression de $T_{\mu\nu}$ utilisée ici est cohérente pour $n \geq 3$.

(A^0, E^0) soit la restriction sur Σ_0 du potentiel vectoriel $A_i dx^i$ et du champ électrique $E_i dx^i = \mathcal{F}_{0i} dx^i$.

On suppose les données initiales C^∞ et asymptotiquement euclidiennes : i.e. pour $r = |x| \to +\infty$, $\alpha > 0$ et M la masse ADM on a :

(1.2)
$$\forall\, i,j = 1,...,n \qquad \begin{cases} g_{0ij} = \begin{cases} (1 + \frac{2M}{r})\delta_{ij} + O(r^{-1-\alpha}) \ , \text{ pour } n = 3 \ , \\ \delta_{ij} + O(r^{\frac{1-n}{2}-\alpha}) \ , \text{ pour } n \geq 4 \ , \end{cases} \\ A^0 = O(r^{\frac{1-n}{2}-\alpha}) \ , \\ k_{0ij} = O(r^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}) \ , \\ E^0 = O(r^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}) \ . \end{cases}$$

Remarque 1.1. *Pour $n = 3$, on note la présence du terme de type Schwarzchild $\frac{2M}{r}$, celui-ci tendant moins vite vers 0 quand $r \to \infty$ qu'un $O(r^{-1-\alpha})$. En revanche, lorsque $n \geq 4$, le terme $\frac{2M}{r^{n-2}}$, correspondant à la généralisation à symétrie sphérique en dimension $n+1$ de la métrique de Schwarzchild, est un $O(r^{\frac{1-n}{2}-\alpha})$. Ceci entraîne la différence qui apparaît, selon les valeurs de n, dans la décomposition* (12.13).

De plus, les données initiales doivent vérifier les équations de contraintes :

$$\text{(1.3)} \qquad \forall\, i,j = 1,...,n \qquad \begin{cases} R_0 - k^i_{0j} k^j_{0i} + k^i_{0i} k^j_{0j} = 2\mathcal{F}_{0i}\mathcal{F}_0{}^i + \mathcal{F}_{ij}\mathcal{F}^{ij} \ , \\ \nabla^j k_{0ij} - \nabla_i k^j_{0j} = \mathcal{F}_{0j}\mathcal{F}_i{}^j \quad , \\ \nabla_i \mathcal{F}^{0i} = 0 \ . \end{cases}$$

où R_0 désigne la courbure scalaire de g_0 et ∇ la dérivée covariante par rapport à g_0.

Remarque 1.2. *Le fait que les équations de contraintes soient satisfaites est une condition nécessaire pour avoir une solution des équations d'Einstein (cf. par exemple [1]). De plus, ces contraintes se propagent, dans le sens où si elles sont satisfaites sur l'hypersurface initiale, alors elles le seront sur toute autre hypersurface dans l'espace-temps construit.*

Enfin, on choisit de travailler avec deux jauges particulières : la jauge de coordonnées harmoniques

$$\text{(1.4)} \qquad \partial_\mu \left(g^{\mu\nu} \sqrt{|\det g|} \right) = 0 \quad \forall \nu = 0,...,n \ ,$$

et la jauge de Lorenz

$$\text{(1.5)} \qquad \partial_\mu \left(\sqrt{|\det g|} A^\mu \right) = 0 \ .$$

Remarque 1.3. *Dans [6], Y.Choquet-Bruhat a montré que le problème de Cauchy pour les équations d'Einstein (dans le vide) est bien posé en coordonnées harmoniques. Ce résultat fondamental s'appuie sur le fait que les équations de contraintes entraînent la propagation dans le temps de la condition de jauge harmonique. Dans la section 4, on reprend cette argumentation pour s'assurer que les jauges de coordonnées harmoniques et de Lorenz se propagent bien dans le temps si on suppose que les données initiales vérifient les contraintes* (1.3)*.*

Dans la section 10, on s'intéresse aux mêmes équations mais avec des données initiales bornées et on montre, là aussi, qu'une solution peut être trouvée, avec existence globale dans une certaine région $\mathcal{C}(R)$ définie en (10.1).

1.1 Résultat principal et esquisse de la preuve

1.1.1 Transformation du système

Pour des raisons de clarté et pour ne pas alourdir les notations, la plupart des résultats présentés dans cette thèse ne concerne que les équations d'Einstein-Maxwell (1.1). Mais ils restent valables si on considère en plus un champ scalaire ψ et qu'on s'intéresse au système :

$$(1.6)\qquad \begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} + \hat{T}_{\mu\nu} \ , \\ D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \ , \\ \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\partial_\mu\left(g^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\partial_\nu\psi\right) = 0 \, . \end{cases}$$

avec $\hat{T}_{\mu\nu} = \partial_\mu\psi\,\partial_\nu\psi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\big(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\psi\,\partial_\beta\psi\big)$, $T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(\mathcal{F}_{\mu\lambda}\mathcal{F}_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\lambda\rho}\mathcal{F}_{\lambda\rho})$ et $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Ici, les conditions initiales vérifient, pour $\alpha > 0$:

(1.7)

$$\forall\ i,j = 1,...,n \qquad \begin{cases} g_{0ij} = \begin{cases} (1+\frac{2M}{r})\delta_{ij} + O(r^{-1-\alpha}) \ , \ \text{pour } n = 3 \ , \\ \delta_{ij} + O(r^{\frac{1-n}{2}-\alpha}) \ , \ \text{pour } n \geq 4 \ , \end{cases} \\ A^0 = O(r^{\frac{1-n}{2}-\alpha}) \ , \\ k_{0ij} = O(r^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}) \ , \\ E^0 = O(r^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}) \ , \\ \psi_0 \equiv \psi|_{t=0} = O(r^{\frac{1-n}{2}-\alpha}) \ , \\ \psi_1 \equiv \partial_t\psi|_{t=0} = O(r^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}) \ , \end{cases}$$

Les équations de contraintes sont :

(1.8)

$$\forall\, i,j = 1,...,n \qquad \begin{cases} R_0 - k^i_{0j}k^j_{0i} + k^i_{0i}k^j_{0j} = 2\mathcal{F}_{0i}\mathcal{F}_0{}^i + \mathcal{F}_{ij}\mathcal{F}^{ij} + |\nabla\psi_0|^2 + |\psi_1|^2 \ , \\ \nabla^j k_{0ij} - \nabla_i k^j_{0j} = \mathcal{F}_{0j}\mathcal{F}_i{}^j + \nabla_i\psi_0\,\psi_1 \quad , \\ \nabla_i \mathcal{F}^{0i} = 0 \ . \end{cases}$$

Notant $\tilde{\Box}_g = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$, les conditions d'harmonicité et de jauge de Lorenz (1.4) et (1.5) permettent d'écrire (cf. section 2) le système (1.6) sous la forme du système quasi-linéaire hyperbolique suivant :

$$\tilde{\Box}_g \begin{pmatrix} h^1_{\mu\nu} \\ A_\sigma \\ \psi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu} - 2\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi \\ F^A_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}}_{F_M} - \begin{pmatrix} \tilde{\Box}_g h^0_{\mu\nu} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{1.9}$$

où

$$h^1_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - h^0_{\mu\nu} , \tag{1.10}$$

avec $h^0_{\mu\nu}$ défini dans la section 12.4. .
Les termes sources $F_{\mu\nu}$, $\tilde{F}_{\mu\nu}$ et F^A_σ sont décrits dans la section 2.
Un résultat important d'Y.Choquet-Bruhat (cf. [6]) assure que les équations de contraintes permettent de montrer qu'une solution du système réduit (1.9) est aussi solution du système de départ (1.6) (cf. section 4). On est donc amené à chercher les solutions du système (1.9).

1.1.2 Enoncé du théorème d'existence globale

Le théorème qui suit est le résultat principal de cette thèse. Cette section ne contient qu'une esquisse de la preuve, les détails étant présentés dans les sections 2 à 9.

Théorème 1.4 (Théorème d'existence globale)**.** *Soient* $(\Sigma_0, g_0, k_0, A^0, E^0, \psi_0, \psi_1)$ *les données initiales du système d'équations d'Einstein-Maxwell* (1.6)*. Supposons que* Σ_0 *soit difféomorphe à* $\mathbb{R}^n$*, que* $(g_0, k_0, A^0, E^0, \psi_0, \psi_1)$ *soient* C^∞ *et vérifient les conditions* (1.7) *et* (1.8)*.*
Soit N *un entier naturel tel que* $N \geq 2[\frac{n+2}{2}] + 6$*. Soit* $g_0 = \delta + h^0_0 + h^1_0$ *où* $h^0_{0ij} = \begin{cases} \chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{ij} & pour\ n = 3 , \\ 0 & pour\ n \geq 4 , \end{cases}$ *avec* $\chi \in C^\infty$ *valant* 1 *pour* $r \geq 3/4$ *et* 0 *pour* $r \leq 1/2$*. Posons*

$$\begin{aligned} E_{N,\gamma}(0) = \sum_{0\leq|I|\leq N} \big(& ||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|}\nabla\nabla^I h^1_0||^2_{L^2} + ||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|}\nabla^I k_0||^2_{L^2} \\ & + ||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|}\nabla\nabla^I A^0||^2_{L^2} + ||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|}\nabla^I E^0||^2_{L^2} \\ & + \|(1+r)^{1/2+\gamma+|I|}\nabla\, \nabla^I \psi_0\|^2_{L^2} + \|(1+r)^{1/2+\gamma+|I|}\nabla^I \psi_1\|^2_{L^2} \big) . \end{aligned} \tag{1.11}$$

Il existe alors une constante $\varepsilon_0 > 0$ telle que, pour toutes données initiales vérifiant

$$\sqrt{E_{N,\gamma}(0)} + M \leq \varepsilon_0, \quad si\ n = 3\,, \qquad (1.12)$$
$$\sqrt{E_{N,\gamma}(0)} \leq \varepsilon_0, \quad si\ n \geq 4\,,$$

pour un certain $\gamma > 0$, le problème de Cauchy pour le système (1.1) *possède une solution C^∞ globale (g, A, ψ) avec $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$ géodésiquement complète.*

Remarque 1.5. *Les hypothèses sur le comportement des données initiales quand $r \to +\infty$ entraînent que l'énergie $E_{N,\gamma}(0)$ est bien finie.*

1.1.3 Principe de la preuve

On considère l'énergie suivante :

(1.13)
$$\mathcal{E}_N(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{Z \in \mathcal{Z}, |I| \leq N} \int_{\sum_\tau} \left(|\partial Z^I h^1|^2 + |\partial Z^I A|^2 + |\partial Z^I \psi|^2 \right) w(q)\, d^n x\ ,$$

où les champs de vecteurs Z et le poids w sont définis respectivement dans les sections 12.2 et 12.4.

Soit T_0 le temps maximal d'existence d'une solution du système réduit (1.9). On a $\mathcal{E}_N(t) \to \infty$ quand $t \to T_0^-$. Soit $0 < \delta < \frac{1}{4}$ et soit $T < T_0$ le temps maximal tels que l'inégalité

$$\mathcal{E}_N(t) \leq 2C_N \varepsilon^2 (1+t)^{2\delta} \qquad (1.14)$$

soit vraie pour $0 \leq t \leq T$. (L'hypothèse (1.12) du théorème d'existence globale et la continuité de $\mathcal{E}_N$ font que $T > 0$).

En obtenant différentes estimations de décroissance et en utilisant l'inégalité d'énergie de la proposition 1.12, on peut montrer que, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'inégalité (1.14) entraîne la même inégalité avec $2C_N$ remplacée par C_N pour $0 \leq t \leq T$, contredisant, par un argument de continuité, la maximalité de T et entraînant que (g, A, ψ) est une solution globale.

Pour résumer, on peut séparer l'argument en trois étapes.

Etape 1 Dans un premier temps, on utilise l'inégalité de Klainerman :

Proposition 1.6 (Inégalité de Klainerman)**.** *Il existe une constante C telle que*

$$(1 + |t| + |x|)^{n-1} (1 + ||t| - |x||) |u(t,x)|^2 \leq C \sum_{|I| \leq [\frac{n+2}{2}]} ||Z^I u(t,.)||^2_{L^2} \qquad (1.15)$$

si u est dans $C^\infty(]t-1,t+1[\times\mathbb{R}^n)$ et tend vers 0 rapidement quand $|x|\to+\infty$.

Celle-ci permet d'obtenir, à partir de (1.14), les estimations faibles de décroissance :

Corollaire 1.7 (Estimations faibles de décroissance)**.** *Soit $0\le t\le T$. Soient (h^1,A) vérifiant (1.14) et h^0 défini par (1.10). Pour $i=0,1$ avec $\delta'=\delta$ si $i=0$ et $\delta'=\gamma>\delta$ si $i=1$, on a, pour $|I|\le N-[\frac{n+2}{2}]$:*
(1.16)
$$|\partial Z^I\psi(t,x)|+|\partial Z^I A(t,x)|+|\partial Z^I h^i(t,x)|\le\begin{cases}C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-1-\delta'}, & q>0\,,\\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-1/2}, & q<0\,.\end{cases}$$

Remarque 1.8. *On note qu'en intégrant* (5.1) *depuis l'hyperplan $t=0$ le long de lignes où $t+r$ et $\omega=\frac{x}{|x|}$ sont fixés, on obtient des informations sur $Z^I(h,A,\psi)$ et que ces estimations sur $Z^I(h,A,\psi)$ entraînent celles sur $\bar\partial Z^I(h,A,\psi)$ puisque $|\bar\partial\phi|\le C\sum_{|I|=1}|Z^I\phi|/(1+t+|q|)$. Rappelons ici que ce sont les dérivées tangentes aux cônes $t-r=cste$ qui sont symbolisées par $\bar\partial=(\bar\partial_0,\,\bar\partial_1,\,...,\bar\partial_n)$ avec $\bar\partial_0=\partial_t+\partial_r$ et $\bar\partial_i=\partial_i-\omega_i\partial_r$ pour $i=1,...,n$.*

Etape 2 En dimension d'espace $n\ge4$, on peut passer directement à l'étape 3 car les estimations (1.16) impliquent (1.22) et (1.23).

Pour $n=3$, on a besoin du corollaire 7.2 de [14] (repris ici dans la proposition suivante) pour obtenir des estimations fortes de décroissance.

Proposition 1.9 (Corollaire 7.2 de [14])**.** *Ici $n=3$. Pour $\gamma'\ge-1$, $\mu'<1/2$, on définit cette fois le poids*

$$\varpi=\varpi(q)=\begin{cases}(1+|q|)^{1+\gamma'}, & \text{quand}\quad q>0\,,\\ (1+|q|)^{1/2-\mu'} & \text{quand}\quad q<0\,.\end{cases}\tag{1.17}$$

Soit $\phi_{\mu\nu}$ une solution de l'équation $\tilde\Box_g\phi_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}$. Supposons que $H^{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}-m^{\alpha\beta}$ satisfait
(1.18)
$$|H|\le\frac{\varepsilon'}{4},\qquad\int_0^\infty\|\,H(t,\cdot)\|_{L^\infty(D_t)}\frac{dt}{1+t}\le\frac14,\qquad|H|_{\mathcal{LT}}\le\frac{\varepsilon'}{4}\,\frac{|q|+1}{1+t+|x|}\,,$$

dans la région $D_t=\{x\in\mathbb{R}^3;\,t/2\le|x|\le2t\}$.
Alors, pour $\alpha=\max(1+\gamma',1/2-\mu')$, pour tout $U,V\in\{L,\underline{L},S_1,S_2\}$ et un

point arbitraire $x \in D_t$, on a :

(1.19)

$$(1+t+|x|)|\varpi(q)\partial\phi(t,x)|_{UV} \leq C\Bigg(\sup_{0\leq\tau\leq t}\sum_{|I|\leq 1}\|\,\varpi(q)Z^I\phi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty} + \int_0^t\Big(\varepsilon'\alpha\|\varpi(q)|\partial\phi(t,\cdot)|_{UV}\|_{L^\infty(D_\tau)} + (1+\tau)\|\varpi(q)|F(\tau,\cdot)|_{UV}\|_{L^\infty(D_\tau)} + \sum_{|I|\leq 2}(1+\tau)^{-1}\|\varpi(q)Z^I\phi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(D_\tau)}\Big)\,d\tau\Bigg).$$

On peut alors obtenir :

Proposition 1.10 (Estimations fortes de décroissance)**.** *Soit* $(h = h^1 + h^0, A, \psi)$ *une solution des équations réduites d'Einstein-Maxwell* (1.9)*. Supposons que* (h^1, A, ψ) *vérifie* (1.14) *sur l'intervalle* $[0,T]$*. Alors pour tout* $t \in [0,T]$*, on a :*

$$\text{pour } n=3,\ |\partial\psi| + |\partial A| + |\partial h|_{\mathcal{TU}} \leq C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1}\,, \tag{1.20}$$
$$\text{pour } n=3,\ |\partial h| \leq C\varepsilon t^{-1}\ln t\,, \tag{1.21}$$
$$\text{pour } n\geq 4,\ |\partial\psi| + |\partial A| + |\partial h| \leq C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1}. \tag{1.22}$$

Sous les mêmes hypothèses, soient $\gamma' < \gamma - \delta$ *et* $\mu' > \delta > 0$ *fixés. Alors il existe des constantes* M_k *et* C_k*, dépendant de* (γ', μ', δ)*, telles que, pour* $|I| = k \leq N/2 + 2$ *:*

(1.23)

$$|\partial Z^I\psi(t,x)| + |\partial Z^I A(t,x)| + |\partial Z^I h^1(t,x)| \leq \begin{cases} C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{-1-\gamma'}, & q>0\,,\\ C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{-1/2+\mu'}, & q<0\,.\end{cases}$$

Les mêmes estimations sont vraies pour h^0 *avec* γ' *remplacée par* $M_k\varepsilon$*.*

Remarque 1.11. *Comme pour la remarque 1.8, on peut obtenir des informations sur* $Z^I(h,A,\psi)$ *et* $\bar\partial Z^I(h,A,\psi)$*.*

Etape 3 Enfin, un calcul d'énergie donne :

Proposition 1.12. *Soit* ϕ *une solution de* $\tilde\Box_g\phi = F$ *avec une métrique* g *telle que, pour* $H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$*, on ait :*

$$(1+|q|)^{-1}|H|_{\mathcal{LL}} + |\partial H|_{\mathcal{LL}} + |\bar\partial H| \leq C\varepsilon'(1+t)^{-1}\,, \tag{1.24}$$
$$(1+|q|)^{-1}|H| + |\partial H| \leq C\varepsilon'(1+t+|q|)^{-\frac12}(1+|q|)^{-\frac12}(1+q_-)^{-\mu}\,.$$

Alors pour tout $0 < \gamma \leq 1$ *et* $0 < \varepsilon' \leq \gamma/2C$*, on a*
(1.25)
$$\int_{\Sigma_t} |\partial\phi|^2 w + \int_0^t \int_{\Sigma_t} |\bar{\partial}\phi|^2 w' \leq 8 \int_{\Sigma_0} |\partial\phi|^2 w + 16 \int_0^t \int_{\Sigma_t} \left(\frac{C\varepsilon' |\partial\phi|^2}{1+\tau} + |F||\partial\phi| \right) w \,.$$

Dans [14], ces résultats sont obtenus par des calculs relativement lourds. On utilise ici une méthode plus naturelle en partant du tenseur d'energie-impulsion standard $T_\mu^{\ \nu} = \nabla_\mu\phi\nabla^\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\delta_\mu^{\ \nu}$ et en choisissant le champ vectoriel $X^\mu = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\delta_0^{\ \mu} w(q)$.

Remarque 1.13. *On note que la condition de coordonnées harmoniques joue ici un rôle important car elle permet de contrôler certains composants de* $|\partial Z^I H|$ *par des termes en dérivées tangentielles* $\bar{\partial} Z^I H$ *(dont on sait qu'ils décroissent plus vite) et des termes d'ordres inférieurs* $\partial Z^J H$ *avec* $J < I$ *(utilisés par récurrence).*

Pour terminer cette introduction, on donne ci-dessous un plan rapide des sections qui vont suivre .

Dans la *section* 2, on transforme les équations d'Einstein-Maxwell en un système d'équations d'ondes quasilinéaires.

Dans la *section* 3, on donne l'énoncé du théorème 3.1 d'existence globale, ainsi que l'idée de la preuve.

La *section* 4 est consacrée à la construction de données initiales satisfaisant la condition d'harmonicité (1.4) et la jauge de Lorenz (1.5) et à l'utilisation des contraintes pour montrer que ces jauges se propagent dans le temps.

La *section* 5 s'intéresse aux estimations de décroissance que l'on peut obtenir si on fait l'hypothèse (3.3).

Dans la *section* 6, on insiste sur le fait que les deux jauges considérées permettent de contrôler plus finement certains composants de h et A.

Dans la *section* 7, on améliore, lorsque $n = 3$, les estimations de la section 5.

Dans la *section* 8, on utilise les différentes estimations déjà obtenues pour montrer le théorème 8.1. Ce dernier permet d'achever la preuve du théorème 3.1.

Dans la *section* 9, on vérifie que la solution est géodésiquement complète.

Dans la *section* 10, on se sert du théorème 3.1 pour étudier le cas du problème de Cauchy associé aux équations d'Einstein-Maxwell, avec des données initiales bornées, non nécessairement petites.

La *section* 11 réunit plusieurs résultats, calculs et remarques qui ont été placés en annexes pour ne pas géner une première lecture.

Enfin, la *section* 12 présente les notations qui sont utilisées dans cette thèse.

2 Ecriture sous la forme d'un système quasi-linéaire

Dans cette section, on utilise les conditions de jauge pour transformer les termes supplémentaires (par rapport aux équations d'Einstein dans le vide de [15]) du système de départ (1.1), afin d'obtenir un système quasi-linéaire de forme adéquate pour le reste de l'argumentation.

L'équation $D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$ de (1.1) entraîne[2] :

(2.1)

$$\begin{aligned}
0 =&\partial_\mu \left[\sqrt{|\det g|} g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\right] \\
=&g^{\nu\beta}\partial_\mu(\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}\partial_\alpha A_\beta) - g^{\nu\beta}\partial_\mu(\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}\partial_\beta A_\alpha) + (\partial_\mu g^{\nu\beta}) \left[\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\right] \\
=&g^{\nu\beta}\sqrt{|\det g|}\tilde{\Box}_g A_\beta + \underbrace{g^{\nu\beta}\partial_\mu(\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha})\partial_\alpha A_\beta - g^{\nu\beta}\partial_\mu(\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha})\partial_\beta A_\alpha}_{=0 \text{ d'après } (1.4)} \\
&\underbrace{-g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha}\sqrt{|\det g|}\partial_\mu \partial_\beta A_\alpha}_{(I)} + (\partial_\mu g^{\nu\beta}) \left[\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\right] .
\end{aligned}$$

Or , d'après (1.5) :

(2.2)

$$\begin{aligned}
0 =&\partial_\beta \partial_\mu(\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha} A_\alpha) = \partial_\beta \left(\underbrace{\partial_\mu(\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}) A_\alpha}_{=0 \text{ d'après } (1.4)} + \sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}\partial_\mu A_\alpha \right) \\
=&\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}\partial_\beta \partial_\mu A_\alpha + \partial_\beta \left(\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}\right) \partial_\mu A_\alpha .
\end{aligned}$$

Ainsi :

(2.3)

$$\begin{aligned}
(I) =&g^{\nu\beta}\partial_\beta \left(\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}\right)\partial_\mu A_\alpha \\
=&g^{\nu\beta}\left(\frac{1}{2}\sqrt{|\det g|} g^{\lambda\tau}(\partial_\beta g_{\lambda\tau}) g^{\mu\alpha} + \sqrt{|\det g|}\partial_\beta g^{\mu\alpha}\right)\partial_\mu A_\alpha .
\end{aligned}$$

On obtient donc :

(2.4)

$$0 = g^{\nu\beta}\tilde{\Box}_g A_\beta + \underbrace{\frac{1}{2} g^{\nu\beta} g^{\lambda\tau}\partial_\beta g_{\lambda\tau} g^{\mu\alpha}\partial_\mu A_\alpha}_{=0 \text{ d'après } (1.4) \text{ et } (1.5)} + g^{\nu\beta}(\partial_\beta g^{\mu\alpha})\partial_\mu A_\alpha + g^{\mu\alpha}(\partial_\mu g^{\nu\beta})(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) .$$

2. On note $\tilde{\Box}_g = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha \partial_\beta$.

Finalement, on trouve :

(2.5)
$$\begin{aligned}\tilde{\Box}_g A_\sigma =& g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (\partial_\mu g_{\nu\sigma})(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) - (\partial_\sigma g^{\mu\alpha}) \partial_\mu A_\alpha \\ =& m^{\nu\beta} m^{\mu\alpha} \partial_\mu h_{\nu\sigma} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + m^{\rho\mu} m^{\lambda\alpha} \partial_\sigma h_{\rho\lambda} \partial_\mu A_\alpha + O(|h||\partial h||\partial A|) \ .\end{aligned}$$

Maintenant, prenant la trace de l'équation dans (1.1) : $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 2(\mathcal{F}_\mu{}^\alpha \mathcal{F}_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\sigma\tau} \mathcal{F}^{\sigma\tau})$, on obtient :

$$R(1 - \frac{n+1}{2}) = 2\mathcal{F}_{\sigma\tau} \mathcal{F}^{\sigma\tau} (1 - \frac{n+1}{4}) \ . \tag{2.6}$$

Injectant R ainsi trouvé dans (1.1), on a :

$$R_{\mu\nu} = 2\mathcal{F}_\mu{}^\alpha \mathcal{F}_{\nu\alpha} - \frac{1}{n-1} g_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\sigma\tau} \mathcal{F}^{\sigma\tau} \ . \tag{2.7}$$

Et on calcule que

(2.8)
$$\begin{aligned}2\mathcal{F}_\mu{}^\alpha \mathcal{F}_{\nu\alpha} - \frac{1}{n-1} g_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\sigma\tau} \mathcal{F}^{\sigma\tau} =& 2m^{\alpha\beta} (\partial_\mu A_\beta - \partial_\beta A_\mu)(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) \\ & - \frac{1}{n-1} m_{\mu\nu} m^{\alpha\sigma} m^{\beta\tau} (\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\sigma) + O(|h||\partial A|^2) \ .\end{aligned}$$

Ceci montre bien qu'on peut écrire les équations sur A sous la forme souhaitée. En ce qui concerne la transformation de $R_{\mu\nu}$, on peut utiliser les calculs de [15]. Ainsi, en supposant les conditions de jauge (1.4) et (1.5) vérifiées, on peut écrire (1.1) sous la forme du système d'équations d'ondes quasi-linéaires :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \tilde{\Box}_g h_{\mu\nu} & = F_{\mu\nu}(h)(\partial h, \partial h) \\ & \quad -4m^{\alpha\beta} (\partial_\mu A_\beta - \partial_\beta A_\mu)(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) \\ (2.9.1) & \quad + \frac{2}{n-1} m_{\mu\nu} m^{\alpha\sigma} m^{\beta\tau} (\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\sigma) \\ & \quad + O(|h||\partial A|^2) \ , \\ & \\ \tilde{\Box}_g A_\sigma & = m^{\nu\beta} m^{\mu\alpha} \partial_\mu h_{\nu\sigma} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \\ & \quad + m^{\rho\mu} m^{\lambda\alpha} \partial_\sigma h_{\rho\lambda} \partial_\mu A_\alpha \\ (2.9.2) & \quad + O(|h||\partial h||\partial A|) \ , \end{cases}$$

où $F_{\mu\nu}(h)(\partial h, \partial h)$ est défini dans le lemme 3.2 de [15] et $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - m_{\mu\nu}$.

Plus précisément,

$$F_{\mu\nu}(h)(\partial h, \partial h) = P(\partial_\mu h, \partial_\nu h) + Q_{\mu\nu}(\partial h, \partial h) + G_{\mu\nu}(h)(\partial h, \partial h) \ , \tag{2.10}$$

où

$$(2.11)\quad P(\partial_\mu h, \partial_\nu h) = \frac{1}{4} m^{\alpha\alpha'} \partial_\mu h_{\alpha\alpha'}\, m^{\beta\beta'} \partial_\nu h_{\beta\beta'} - \frac{1}{2} m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \partial_\mu h_{\alpha\beta}\, \partial_\nu h_{\alpha'\beta'} \ ,$$

(2.12)

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}(\partial h, \partial h) &= \partial_\alpha h_{\beta\mu}\, m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \partial_{\alpha'} h_{\beta'\nu} - m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \big(\partial_\alpha h_{\beta\mu}\, \partial_{\beta'} h_{\alpha'\nu} - \partial_{\beta'} h_{\beta\mu}\, \partial_\alpha h_{\alpha'\nu}\big) \\ &+ m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \big(\partial_\mu h_{\alpha'\beta'}\, \partial_\alpha h_{\beta\nu} - \partial_\alpha h_{\alpha'\beta'}\, \partial_\mu h_{\beta\nu}\big) + m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \big(\partial_\nu h_{\alpha'\beta'}\, \partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\alpha h_{\alpha'\beta'}\, \partial_\nu h_{\beta\mu}\big) \\ &+ \frac{1}{2} m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \big(\partial_{\beta'} h_{\alpha\alpha'}\, \partial_\mu h_{\beta\nu} - \partial_\mu h_{\alpha\alpha'}\, \partial_{\beta'} h_{\beta\nu}\big) + \frac{1}{2} m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \big(\partial_{\beta'} h_{\alpha\alpha'}\, \partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\nu h_{\alpha\alpha'}\, \partial_{\beta'} h_{\beta\mu}\big) \ . \end{aligned}$$

On remarque que $Q_{\mu\nu}$ vérifie la condition nulle (cette structure particulière est définie dans [12] ; les formes nulles standardes sont $Q_{\alpha\beta}(\partial\phi, \partial\psi) = \partial_\alpha\phi\partial_\beta\psi - \partial_\beta\phi\partial_\alpha\psi$ et $Q_0(\partial\phi, \partial\psi) = m^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\psi$) et que $G_{\mu\nu}(h)(\partial h, \partial h)$ est une forme quadratique en ∂h avec des coefficients lisses dépendants de h et s'annulant quand h s'annule : $G_{\mu\nu}(0)(\partial h, \partial h) = 0$. Parcontre, le terme P semble a priori plus problématique. Pour l'étudier, on utilisera sa décomposition par rapport à la famille $\mathcal{U}$ définie dans la section 12.3.

Rappelons que $\tilde{\Box}_g = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$, on est alors amené à étudier le système :

$$(2.13)\qquad \tilde{\Box}_g \begin{pmatrix} h^1_{\mu\nu} \\ A_\sigma \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu} \\ F^A_\sigma \end{pmatrix}}_{F_M} - \begin{pmatrix} \tilde{\Box}_g h^0_{\mu\nu} \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

où $h_{\mu\nu} = h^1_{\mu\nu} + h^0_{\mu\nu}$ avec $h^0_{\mu\nu}(t) = \begin{cases} \chi(r/t)\chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{\mu\nu} & \text{pour } n = 3 \ , \\ 0 \quad \text{pour } n \geq 4 \ , \end{cases}$
$\chi \in C^\infty$, $\chi(s)$ valant 1 quand $s \geq 3/4$ et 0 quand $s \leq 1/2$ et :

(2.14)

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu}(h)(\partial A, \partial A) = &- 4m^{\alpha\beta}(\partial_\mu A_\beta - \partial_\beta A_\mu)(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) \\ &+ \frac{2}{n-1} m_{\mu\nu} m^{\alpha\sigma} m^{\beta\tau}(\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\sigma) \\ &+ O(|h||\partial A|^2) \ , \end{aligned}$$

(2.15)

$$\begin{aligned} F^A_\sigma(h)(\partial h, \partial A) = &\ m^{\nu\beta} m^{\mu\alpha} \partial_\mu h_{\nu\sigma}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + m^{\rho\mu} m^{\lambda\alpha} \partial_\sigma h_{\rho\lambda} \partial_\mu A_\alpha \\ &+ O(|h||\partial h||\partial A|) \ . \end{aligned}$$

L'étude de la structure du terme source F_M est déterminante pour la démonstration de l'existence globale ; la section 6 y est consacrée. Ce sont principalement les nouveaux termes $\tilde{F}_{\mu\nu}$ et F^A_σ qu'il a fallu analyser pour s'assurer qu'ils permettaient bien d'utiliser la méthode de [14]. L'estimation de la quantité $|Z^I F_M|$ est elle aussi capitale ; c'est pourquoi elle est décrite en détail dans l'annexe 11.2.

3 Théorème d'existence globale

Le théorème suivant est le résultat principal de cette thèse.

Théorème 3.1 (Théorème d'existence globale). *Soient* $(\Sigma_0, g_0, k_0, A^0, E^0)$ *les données initiales du système d'équations d'Einstein-Maxwell* (1.1). *Supposons que* Σ_0 *soit difféomorphe à* $\mathbb{R}^n$, *que* (g_0, k_0, A^0, E^0) *soient* C^∞ *et vérifient les conditions* (1.2) *et* (1.3).
Soit N *un entier naturel tel que* $N \geq 2[\frac{n+2}{2}] + 6$. *Soit* $g_0 = \delta + h_0^0 + h_0^1$ *où* $h_{0ij}^0 = \begin{cases} \chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{ij} & \textit{pour } n = 3\ , \\ 0 \quad \textit{pour } n \geq 4\ , \end{cases}$ *avec* $\chi \in C^\infty$ *valant* 1 *pour* $r \geq 3/4$ *et* 0 *pour* $r \leq 1/2$. *Posons*

(3.1)
$$E_{N,\gamma}(0) = \sum_{0 \leq |I| \leq N} \big(||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|}\nabla\nabla^I h_0^1||_{L^2}^2 + ||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|}\nabla^I k_0||_{L^2}^2 \\ +||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|}\nabla\nabla^I A^0||_{L^2}^2 + ||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|}\nabla^I E^0||_{L^2}^2 \big)\ .$$

Il existe alors une constante $\varepsilon_0 > 0$ *telle que, pour toutes données initiales vérifiant*

$$\sqrt{E_{N,\gamma}(0)} + M \leq \varepsilon_0, \quad \textit{si } n = 3\,, \\ \sqrt{E_{N,\gamma}(0)} \leq \varepsilon_0, \quad \textit{si } n \geq 4\,, \tag{3.2}$$

pour un certain $\gamma > 0$, *le problème de Cauchy pour le système* (1.1) *possède une solution* C^∞ *globale* (g, A) *avec* $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$ *géodésiquement complète.*

Idée de la preuve :
Il est standard de montrer (cf. section 4) que toute solution h^1 du système (2.13), avec des données initiales vérifiant les équations de contraintes (1.3) et les conditions de jauge (1.4) et (1.5), définit une solution $g = m + h^1 + h^0$ du système de départ (1.1). Et puisqu'on peut toujours construire (cf. section 4) des données initiales vérifiant (1.3), (1.4) et (1.5) à partir des données initiales du théorème 3.1 , on est ramené à chercher des solutions globales de (2.13). De plus, on sait que si les données initiales vérifient (1.3), (1.4) et (1.5) alors il existe une solution locale en temps (h, A) de (2.13) telle que $g = m + h$ et A vérifient (1.4) et (1.5) pour tout t dans un intervalle maximal d'existence $[0, T_0]$. On note que T_0 peut être caractérisé par le fait que $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) \to \infty$ quand $t \to T_0^-$.

Soit $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t)$ définie par (12.10), soit $0 < \delta < \frac{1}{4}$ et soit $T < T_0$ le temps maximal tel que l'inégalité

$$\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) \leq 2C_N\varepsilon^2(1+t)^{2\delta} \tag{3.3}$$

soit vraie pour $0 \leq t \leq T$. (Les hypothèses du théorème d'existence globale 3.1 font que $T > 0$). Le théorème 8.1 permet de montrer que, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'inégalité (3.3) entraîne la même inégalité avec $2C_N$ remplacée par C_N pour $0 \leq t \leq T$. Puisque $\mathcal{E}_N^{Maxwell}$ est une fonction continue, cela contredit la maximalité de T et donc (3.3) est vraie pour $0 \leq T \leq T_0$. De plus, puisque l'énergie $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t)$ est maintenant finie en $t = T_0$, on peut étendre la solution $(h_{\mu\nu}, A_\sigma)$ au delà de T_0, contredisant ainsi la maximalité de T_0 et montrant que $T_0 = +\infty$. Ceci a pour conséquence que la solution est globale.

4 Construction des données initiales

4.1 Construction

Dans ce paragraphe, on vérifie qu'à partir des données initiales (g_0, k_0, A^0, E^0) vérifiant (1.3), on peut construire $(g|_{t=0}, \partial_t g|_{t=0}, A|_{t=0}, \partial_t A|_{t=0})$ satisfaisant (1.4) et (1.5).

Soit $\chi \in C^\infty$ valant 1 pour $r \geq 3/4$ et 0 pour $r \leq 1/2$. On a supposé

$$g_0 = \delta + h_0^0 + h_0^1 \text{ où } h_{0ij}^0 = \begin{cases} \chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{ij} \quad \text{pour } n = 3 \ , \\ 0 \quad \text{pour } n \geq 4 \ , \end{cases}$$

et on veut

$$g|_{t=0} = m + h^0|_{t=0} + h^1|_{t=0} \text{ où } h_{\mu\nu}^0|_{t=0} = \begin{cases} \chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{\mu\nu} \quad \text{pour } n = 3 \ , \\ 0 \quad \text{pour } n \geq 4 \ . \end{cases}$$

Soit $a^2 = \begin{cases} (1 - \frac{2M}{r}\chi(r)) \quad \text{pour } n = 3 \ , \\ 1 \quad \text{pour } n \geq 4 \ . \end{cases}$

On pose tout d'abord :

$$g_{ij}|_{t=0} = g_{0ij}, \quad g_{00}|_{t=0} = -a^2, \quad g_{0i}|_{t=0} = 0 \ , \tag{4.1}$$

$$\partial_t g_{ij}|_{t=0} = -2ak_{0ij} \ . \tag{4.2}$$

Il reste à déterminer $\partial_t g_{0\alpha}$. Pour cela, on cherche à satisfaire la condition de coordonnées harmoniques écrite sous la forme :

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha g_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta} \ .$$

En prenant $\mu = 0$, on obtient :

$$\frac{1}{2}g^{00}\partial_t g_{00} = -g^{\beta i}\partial_i g_{0\beta} + \frac{1}{2}g^{ij}\partial_t g_{ij} \ ,$$

et donc

$$\partial_t g_{00}|_{t=0} = 2a^3 g_0^{ij} k_{0ij} \ . \tag{4.3}$$

Si on prend cette fois $\mu = i$, on obtient :

$$g^{00}\partial_t g_{0i} = -g^{\beta j}\partial_j g_{i\beta} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_i g_{\mu\nu} \ ,$$

d'où

$$\partial_t g_{0i}|_{t=0} = a^2 g_0^{kj} \partial_j g_{0ki} - \frac{1}{2} a^2 g_0^{kj} \partial_i g_{0kj} - a\partial_i a \ . \tag{4.4}$$

Enfin, il faut construire $A|_{t=0}$ et $\partial_t A|_{t=0}$.
Pour cela, on choisit $A_0|_{t=0} = 0$, on pose $A_i|_{t=0} = A_i^0$ et $\partial_t A_i|_{t=0} = E_i^0$ et on calcule $\partial_t A_0|_{t=0}$ en utilisant que $(D^\mu A_\mu)|_{t=0} = 0$.

4.2 Equivalence du système réduit et du système initial

On a construit $(A|_{t=0}, \partial_t A|_{t=0})$ tel que :

$$D_\mu A^\mu|_{t=0} = 0 \ . \tag{4.5}$$

On impose que A^ν soit solution de l'équation d'évolution

$$\Box_g A^\nu = R_\sigma{}^\nu A^\sigma \ , \tag{4.6}$$

avec $A_\mu|_{t=0}$ et $\partial_t A_\mu|_{t=0}$ précedemment construites pour données initiales .

On note que (4.6) vient de :

$$\begin{aligned} 0 = D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} &= D_\mu (D^\mu A^\nu - D^\nu A^\mu) \\ &= -D_\mu D^\nu A^\mu + D_\mu D^\mu A^\nu \\ &= \Box_g A^\nu - D_\mu D^\nu A^\mu \\ &= \Box_g A^\nu - g^{\beta\nu}(R^\mu{}_{\sigma\mu\beta} A^\sigma + D_\beta \underbrace{D_\mu A^\mu}_{=0}) \\ &= \Box_g A^\nu - R_\sigma{}^\nu A^\sigma \ . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Etant donnée une solution A_μ du système réduit (2.9) vérifiant (4.6) et les équations de contraintes (1.3), on veut montrer que A_μ satisfait la condition de Lorenz $D_\mu A^\mu = 0$ et l'équation de Maxwell $D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$ pour tout t.

Dans ce but, on définit :

$$\Lambda := D_\mu A^\mu \tag{4.8}$$

et on veut montrer que $\Lambda = 0$ pour tout t. Par construction des données initiales, on a $\Lambda = 0$ en $t = 0$. On calcule que

$$\begin{aligned} D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} &= -\, D^\nu \Lambda + \Box_g A^\nu - R_\sigma{}^\nu A^\sigma \\ &= -\, D^\nu \Lambda \quad \text{d'après (4.6)} \ . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ceci montre que $\partial_t \Lambda = 0$ sur Σ_0 si et seulement si on impose l'équation de contrainte de Maxwell

$$D_i \mathcal{F}^{i0}|_{t=0} = 0 \,. \tag{4.10}$$

En supposant cette équation de contrainte vérifiée, on obtient d'après (4.9) :

$$0 = D_\nu D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = -\Box_g \Lambda \,.$$

Ici, on a utilisé que le membre de gauche de la dernière équation est identiquement nul car $\mathcal{F}^{\mu\nu} = D^\mu A^\nu - D^\nu A^\mu$. Il s'en suit que Λ satisfait l'équation d'onde homogène :

$$\Box_g \Lambda = 0 \,.$$

Or, par (10.62), on a $\Lambda = 0$ sur Σ_0 et on a $\partial_t \Lambda = 0$ sur Σ_0 d'après l'équation de contrainte (4.10). Ainsi, $\Lambda \equiv 0$ sur tout développement globalement hyperbolique de Σ_0. On voit alors, d'après (4.9), que $D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$ pour tout t, montrant que le champ A_μ satisfait à la fois l'équation de Maxwell et la jauge de Lorenz pour tout t.

Maintenant, étant donnée une solution g du système réduit (2.9) vérifiant les équations de contraintes (1.3), on peut montrer que $g = m + h$ satisfait la condition de jauge harmonique (1.4) et l'équation d'Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$ pour tout t.
En effet, soit g la solution des équations d'Einstein réduites (2.9) , on peut écrire (avec la notation $\Gamma^\lambda = g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \lambda}$) :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu \Gamma_\nu + D_\nu \Gamma_\mu) = \mathcal{N}_{\mu\nu} \tag{4.11}$$

où $\mathcal{N}_{\mu\nu}$ est une certaine fonction donnée de g, ∂g, A et ∂A. On donne ci-dessous les détails de ce calcul, bien connu, qui permet d'établir (4.11).

En notant $\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\delta}(\partial_\mu g_{\delta\nu} + \partial_\nu g_{\delta\mu} - \partial_\delta g_{\mu\nu})$, on a :

$$R_{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\beta \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \beta} - \partial_\nu \Gamma_{\mu\ \beta}^{\ \beta}}_{A} \underbrace{- \Gamma_{\rho\ \nu}^{\ \beta} \Gamma_{\mu\ \beta}^{\ \rho}}_{B} + \underbrace{\Gamma_{\rho\ \beta}^{\ \beta} \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \rho}}_{C} \,, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} A = & -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\nu \partial_\beta g_{\alpha\mu} + \partial_\mu \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\beta g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g_{\alpha\beta}) \,, \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$B = \frac{1}{4}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g_{\alpha\beta}) \,, \tag{4.14}$$

$$C = -\Gamma_{\mu\alpha\nu} \Gamma^\alpha - \frac{1}{2}(\partial_\beta g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \,. \tag{4.15}$$

De plus,

(4.16)
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(D_\nu\Gamma_\mu + D_\mu\Gamma_\nu) &= \frac{1}{2}(\partial_\nu\Gamma_\mu + \partial_\mu\Gamma_\nu) - \Gamma_{\mu\alpha\nu}\Gamma^\alpha \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\nu\partial_\beta g_{\alpha\mu} + \partial_\mu\partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu\partial_\mu g_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(\partial_\mu g^{\alpha\beta})\Gamma_{\alpha\nu\beta} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})\Gamma_{\alpha\mu\beta} - \Gamma_{\mu\alpha\nu}\Gamma^\alpha \,.\end{aligned}$$

On trouve alors :

(4.17)
$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} =& \frac{1}{2}(D_\nu\Gamma_\mu + D_\mu\Gamma_\nu) - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu g^{\alpha\beta})\Gamma_{\alpha\nu\beta} - \frac{1}{2}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})\Gamma_{\alpha\mu\beta} \\ & - \frac{1}{4}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g_{\alpha\beta}) \\ :=& \frac{1}{2}(D_\nu\Gamma_\mu + D_\mu\Gamma_\nu) - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} + \mathcal{N}_1(g,\partial g) \,.\end{aligned}$$

Comme g est solution des équations réduites (2.9), on a :

$$-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} = \mathcal{N}_2(g,\partial g, A, \partial A) \,. \tag{4.18}$$

On se ramène donc bien à (4.11).

Pour prouver que $\Gamma^\lambda = 0$ pour tout t, on part de (4.11) et on utilise l'identité de Bianchi contractée $D^\nu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}D_\mu R$:

(4.19)
$$\begin{aligned}0 =& 2(D^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}D_\mu R) = D^\nu D_\mu\Gamma_\nu + D^\nu D_\nu\Gamma_\mu + 2D^\nu\mathcal{N}_{\mu\nu} - D_\mu D^\nu\Gamma_\nu - D_\mu\mathcal{N}^\nu_{\ \nu} \\ &= D^\nu D_\nu\Gamma_\mu + R_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma + 2D^\nu\mathcal{N}_{\mu\nu} - D_\mu\mathcal{N}^\nu_{\ \nu} \,.\end{aligned}$$

Ainsi Γ^λ vérifie une équation d'onde avec condition initiale $\Gamma^\lambda|_{t=0} = 0$. La théorie des équations hyperboliques nous dit que si, en plus, $D_t\Gamma^\lambda|_{t=0} = 0$ alors $\Gamma^\lambda = 0$ pour tout t. Et en utilisant les équations de contraintes (1.3), on peut montrer qu'effectivement $D_t\Gamma^\lambda|_{t=0} = 0$ (cf. [6]).

5 Estimations faibles de décroissance

Cette section présente les premières estimations que l'on obtient lorsque l'on utilise l'inégalité de Klainerman-Sobolev à poids de la proposition 11.6. Ces estimations dîtes faibles seront améliorées (pour $n = 3$) dans la section 7.

Soient δ et γ tels que $0 < \delta < 1/4$ et $\delta < \gamma$. Supposons (3.3) vérifiée pour $t \leq T$.

Corollaire 5.1 (Estimations faibles de décroissance)**.** *Soit* $0 \leq t \leq T$. *Soient* (h^1, A) *vérifiant (3.3) et* h^0 *défini par* (12.13)*. Pour* $i = 0, 1$ *avec* $\delta' = \delta$ *si* $i = 0$ *et* $\delta' = \gamma > \delta$ *si* $i = 1$*, on a :*

(5.1)
$$|\partial Z^I A(t,x)| + |\partial Z^I h^i(t,x)| \leq \begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-1-\delta'}, & q > 0\,, \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-1/2}, & q < 0\,, \end{cases} \quad |I| \leq N - \left[\frac{n+2}{2}\right]\,,$$

De plus,

(5.2)
$$|Z^I A(t,x)| + |Z^I h^i(t,x)| \leq \begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-\delta'}, & q > 0\,, \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{1/2}, & q < 0\,, \end{cases} \quad |I| \leq N - \left[\frac{n+2}{2}\right]\,,$$

et

(5.3)
$$|\bar\partial Z^I A(t,x)| + |\bar\partial Z^I h^i(t,x)| \leq \begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{-1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-\delta'}, & q > 0\,, \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{-1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{1/2}, & q < 0\,, \end{cases} \quad |I| \leq N - \left[\frac{n+2}{2}\right] - 1\,.$$

Remarque 5.2. *Notant* $H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$*, les estimations sur* h *du corollaires* 5.1 *restent vraies pour* H *car* $H^{\alpha\beta} = -m^{\alpha\alpha'}m^{\beta\beta'}h_{\alpha'\beta'} + O(h^2)$*.*

Preuve : Comme les hypothèses sur A et h^1 sont les mêmes, on peut adapter la preuve du corollaire 9.3 de [14], l'outil fondamental étant l'inégalité de Klainerman-Sobolev à poids de la proposition 11.6. Les calculs présentés suivent ceux de [14], en tenant compte des dimensions générales et de l'hypothèse (3.3) sur la nouvelle énergie considérée ici.

Les estimations pour $i = 0$ découlent d'un calcul direct s'appuyant sur la forme de h^0 (On pourra consulter les calculs (8.13) et (8.14)).
Pour $i = 1$, on procède de la manière suivante :

Preuve de (5.1) *:*

Notons tout d'abord que $[\partial_\mu, Z_{\alpha\beta}]$ est soit égal à 0, soit égal à $\pm\,\partial_\nu$ pour un certain ν. Ainsi, on a :

$$|Z^I\partial u| \leq C\sum_{|J|\leq|I|}|\partial Z^J u|\,. \tag{5.4}$$

D'après la proposition 11.6, il existe une constante C telle que pour toute fonction u lisse et tendant vers 0 rapidement quand $|x|\to+\infty$, on ait

$$(1+|t|+|x|)^{\frac{n-1}{2}}[(1+|q|)w(q)]^{\frac12}|u(t,x)| \leq C\sum_{|I|\leq[\frac{n+2}{2}]}||w(q)^{\frac12}Z^I u(t,.)||_{L^2}. \tag{5.5}$$

Prenant $u=\partial Z^J\begin{pmatrix}h^1\\A\end{pmatrix}$, on a pour tout $|J|\leq N-\left[\frac{n+2}{2}\right]$:

(5.6)

$$\begin{aligned}(1+|t|+|x|)^{\frac{n-1}{2}}[(1+|q|)w(q)]^{\frac12}|\partial Z^J\begin{pmatrix}h^1\\A\end{pmatrix}(t,x)| &\leq C\sum_{|I|\leq[\frac{n+2}{2}]}||w(q)^{\frac12}Z^I\partial Z^J\begin{pmatrix}h^1\\A\end{pmatrix}(t,.)||_{L^2}\\ &\underbrace{\leq}_{\text{d'après (5.4)}} C\sum_{|K|\leq N}||w(q)^{\frac12}\partial Z^K\begin{pmatrix}h^1\\A\end{pmatrix}(t,.)||_{L^2}\\ &\underbrace{\leq}_{\text{d'après (3.3)}} C\varepsilon(1+t)^\delta.\end{aligned}$$

D'où, pour $|I|\leq N-\left[\frac{n+2}{2}\right]$:
(5.7)

$$|\partial Z^I A(t,x)|+|\partial Z^I h^1(t,x)| \leq \begin{cases}C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}}(1+|q|)^{-1-\gamma}(1+t)^\delta, & q>0\,,\\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}}(1+|q|)^{-1/2}(1+t)^\delta, & q<0\,.\end{cases}$$

Ceci entraîne (5.1) et on note aussi que, pour $t=0$, on a :
(5.8)

$$|\partial Z^I A(0,x)|+|\partial Z^I h^1(0,x)| \leq C\varepsilon(1+|x|)^{\frac{-1-n}{2}-\gamma},\quad |I|\leq N-\left[\frac{n+2}{2}\right]\,.$$

Preuve de (5.2) *:*
D'après les hypothèses (1.2),

$$\liminf_{|x|\to+\infty}|h^1(0,x)+A(0,x)|\to 0\,. \tag{5.9}$$

On a alors

$$\lim_{|x|\to+\infty}|Z^I\begin{pmatrix}h^1\\A\end{pmatrix}(0,x)|\to 0,\quad |I|\leq N-\left[\frac{n+2}{2}\right]\,. \tag{5.10}$$

En effet, pour $|I| = 0$, cela découle de (5.9) et si $|I| \geq 1$, cela vient de (5.1) puisque $|Z\phi| \leq C(1 + t + |x|)|\partial\phi|$.

On peut alors montrer (5.2) en $t = 0$. Soit $|X| >> 1$, on a , pour tout $|I| \leq N - \left[\frac{n+2}{2}\right]$:

(5.11)
$$\begin{aligned}
|Z^I \binom{h^1}{A} (0, |x|\omega)| &\leq |Z^I \binom{h^1}{A} (0, |X|\omega)| + \int_{|x|}^{|X|} |\partial Z^I \binom{h^1}{A} (0, \rho\omega)| \, d\rho \\
&\underbrace{\leq}_{\text{d'après (5.8)}} |Z^I \binom{h^1}{A} (0, |X|\omega)| + \int_{|x|}^{|X|} C\varepsilon(1 + |\rho|)^{\frac{-1-n}{2}-\gamma} \, d\rho \\
&\leq |Z^I \binom{h^1}{A} (0, |X|\omega)| + C\varepsilon(1 + |x|)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} .
\end{aligned}$$

Faisant tendre $|X|$ vers $+\infty$, on obtient (5.2) en $t = 0$, en utilisant (5.10). On a même :

$$|Z^I \binom{h^1}{A} (0, x)| \leq C\varepsilon(1 + |x|)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} . \tag{5.12}$$

Pour montrer (5.2) quand $t \geq 0$, on étudie séparément le cas où $r \geq t$ et le cas $r < t$. Dans les deux cas, on intègre (5.1) depuis l'hyperplan $t = 0$ le long de lignes où $t + r$ et $\omega = \frac{x}{|x|}$ sont fixés :

• cas où $r \geq t$; on a $|q| = r - t$ et $t + |q| = r$:

(5.13)
$$\begin{aligned}
|Z^I \binom{h^1}{A} (t, r\omega)| &\leq \int_r^{t+r} |\partial Z^I \binom{h^1}{A} (t + r - \rho, \rho\omega)| \, d\rho + |Z^I \binom{h^1}{A} (0, (t + r)\omega)| \\
&\underbrace{\leq}_{\text{par (5.1) et (5.12)}} C\varepsilon \int_r^{t+r} (1 + \rho)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1 + \rho - t + \rho - r)^{-1-\gamma} \, d\rho + C\varepsilon(1 + t + r)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} \\
&\underbrace{\leq}_{\rho\geq r} C\varepsilon \int_r^{t+r} (1 + r)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1 + \rho - t)^{-1-\gamma} \, d\rho + C\varepsilon(1 + t + r)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} \\
&\leq C\varepsilon(1 + r)^{\frac{1-n}{2}+\delta} \left[-\frac{1}{\gamma}(1 + \rho - t)^{-\gamma}\right]_r^{t+r} + C\varepsilon(1 + t + r)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} \\
&\leq C\varepsilon(1 + \underbrace{r}_{=t+|q|})^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1 + \underbrace{r - t}_{=|q|})^{-\gamma} + C\varepsilon(1 + t + r)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} \\
&\leq C\varepsilon(1 + t + |q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1 + |q|)^{-\gamma} .
\end{aligned}$$

• cas où $r < t$; on a $|q| = t - r$ et $t + |q| = 2t - r$:

(5.14)
$$|Z^I \binom{h^1}{A}(t, r\omega)| \leq \underbrace{\int_r^{t+r} |\partial Z^I \binom{h^1}{A}(t + r - \rho, \rho\omega)|\, d\rho}_{(I)} + \underbrace{|Z^I \binom{h^1}{A}(0, (t + r)\omega)|}_{(II)} .$$

$$(5.15) \qquad (II) \underbrace{\leq}_{\text{par } (5.12)} C\varepsilon(1 + t + r)^{\frac{1-n}{2} - \gamma}$$
$$\underbrace{\leq}_{1+t+r=\frac{1}{2}(2+2t+2r)\geq\frac{1}{2}(1+2t-r)\geq\frac{1}{2}(1+t+|q|)} C\varepsilon(1 + t + |q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1 + |q|)^{1/2} .$$

(5.16)
$$(I) \leq \underbrace{\int_r^{\frac{t+r}{2}} |\partial Z^I \binom{h^1}{A}(t + r - \rho, \rho\omega)|\, d\rho}_{(I_1)} + \underbrace{\int_{\frac{t+r}{2}}^{t+r} |\partial Z^I \binom{h^1}{A}(t + r - \rho, \rho\omega)|\, d\rho}_{I_2} .$$

$$(5.17) \qquad (I_2) \leq |Z^I \binom{h^1}{A}(0, (t + r)\omega)| + |Z^I \binom{h^1}{A}(\frac{t + r}{2}, \frac{t + r}{2}\omega)| .$$

En utilisant (5.15) et (5.2) pour $q = 0$, on obtient

$$(5.18) \qquad (I_2) \leq C\varepsilon(1 + t + |q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1 + |q|)^{1/2} .$$

Enfin, on a :

$$(5.19) \quad (I_1) \underbrace{\leq}_{\text{par } (5.1)} \int_r^{\frac{t+r}{2}} C\varepsilon(1 + 2(t + r) - 3\rho)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1 + t + r - 2\rho^{-1/2})\, d\rho$$
$$\leq C\varepsilon(1 + t + |q|^{\frac{1-n}{2}+\delta}) \left[-(1 + t + r - 2\rho)^{1/2}\right]_r^{\frac{t+r}{2}}$$
$$\leq C\varepsilon(1 + t + |q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1 + |q|)^{1/2} .$$

On a donc bien :

$$(5.20) \qquad |Z^I \binom{h^1}{A}(t, r\omega)| \leq C\varepsilon(1 + t + |q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1 + |q|)^{1/2} .$$

Finalement, les estimations (5.3) suivent de (5.2) puisque, pour toute fonction ϕ, on a :
$$|\bar{\partial}\phi| \leq C \sum_{|I|=1} |Z^I \phi|/(1 + t + |q|) .$$

6 Jauge harmonique et jauge de Lorenz

La section 4 nous assure que les conditions de jauge de Lorenz (1.5) et de jauge harmonique (1.4) se propagent dans le temps. Ces jauges vont nous permettre d'obtenir des estimations plus fines sur certains composants de h et A (cf. lemmes 6.1, 6.3 et proposition 6.4).

Commençons par noter que, si A et g vérifient (1.4) et (1.5), alors

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = 0 \ . \tag{6.1}$$

(6.1) entraîne le lemme suivant :

Lemme 6.1. *Pour A et g vérifiant* (6.1) *on a*

$$|\partial A|_{\mathcal{L}} \leq C|\bar{\partial} A| + O(|h||\partial A|) \ . \tag{6.2}$$

Preuve : (6.1) implique que

$$m^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = O(|h||\partial A|) \ . \tag{6.3}$$

En décomposant cette égalité par rapport à la famille $\mathcal{U} = \{L, \underline{L}, S_1, S_2, ..., S_{n-1}\}$ définie dans la section 12.3, on a

$$-\frac{1}{2}\underline{L}^\mu\partial_\mu A_L - \frac{1}{2}L^\mu\partial_\mu A_{\underline{L}} + + \sum_{i=1}^{n-1}\partial_{S^i}A_{S^i} = O(|h||\partial A|) \ . \tag{6.4}$$

En ajoutant et en retranchant la quantité $-\frac{1}{2}(L^\mu\partial_\mu A_L + \sum_{i=1}^{n-1} S^{i\mu}\partial_\mu A_L)$, puis en passant à la valeur absolue, on obtient

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{1}{2}|\underline{L}^\mu\partial_\mu A_L + L^\mu\partial_\mu A_L + \sum_{i=1}^{n-1} S^{i\mu}\partial_\mu A_L|}_{\equiv|\partial A|_{\mathcal{L}}} \leq O(|h||\partial A|) \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}|L^\mu\partial_\mu A_L + \sum_{i=1}^{n-1} S^{i\mu}\partial_\mu A_L + L^\mu\partial_\mu A_{\underline{L}} + 2(\sum_{i=1}^{n-1}\partial_{S^i}A_{S^i})|}_{\leq C|\bar{\partial}A|} \ , \end{aligned} \tag{6.5}$$

d'où le résultat.

6.1 Etude du terme source F_M de (2.13)

Le lemme suivant est fondamental pour l'estimation du terme $Z^I F_M$, où les champs Z sont définis dans la section 12.2, estimation qui intervient lorsque l'on doit commuter l'équation (2.13) avec les champs de vecteurs Z^I (cf. preuve du théorème 8.1 et annexe 11.2) .

Lemme 6.2. *Si* $g_{\mu\nu} = m_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ *vérifie la condition harmonique* (1.4)*, on a*

$$|F(h)(\partial h, \partial h)|_{\mathcal{TU}} \leq C|\bar{\partial} h||\partial h| + O(|h||\partial h|^2)\,, \tag{6.6}$$
$$|F(h)(\partial h, \partial h)| \leq C|\partial h|^2_{\mathcal{TU}} + C|\bar{\partial} h||\partial h| + O(|h||\partial h|^2)\,. \tag{6.7}$$

Si, en plus, A vérifie la condition de Lorenz (1.5) *(et donc* (6.1) *est vérifiée), alors*

$$|\tilde{F}(h)(\partial A, \partial A)|_{\mathcal{TU}} \leq C|\bar{\partial} A||\partial A| + O(|h||\partial A|^2)\,, \tag{6.8}$$
$$|\tilde{F}(h)(\partial A, \partial A)| \leq C|\partial A|^2 + O(|h||\partial A|^2)\,, \tag{6.9}$$
$$|F^A_\sigma(h)(\partial h, \partial h)| \leq C|\bar{\partial} h||\partial A| + C|\bar{\partial} A||\partial h| + O(|h||\partial h||\partial A|)\,. \tag{6.10}$$

Preuve du lemme (6.2) *:*

Preuve de (6.6) *et* (6.7) *:* cf. preuve de la proposition 9.7 de [14].(L'outil principal est la proposition 6.4 pour $|I| = 0$).

Preuve de (6.9)*) :* L'estimation est évidente.

Preuve de (6.8) *:*

(6.11)
$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\mu\nu}(h)(\partial A, \partial A) = &-4\,\underbrace{m^{\alpha\beta}\partial_\mu A_\beta \partial_\nu A_\alpha}_{\tilde{P}_{\mu\nu}(\partial A,\partial A)} \\ &+4\,\underbrace{m^{\alpha\beta}\partial_\beta A_\mu(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) + 4m^{\alpha\beta}\partial_\mu A_\beta \partial_\alpha A_\nu}_{\tilde{Q}^1_{\mu\nu}(\partial A,\partial A)} \\ &+\frac{2}{n-1}\underbrace{m_{\mu\nu}m^{\alpha\sigma}m^{\beta\tau}(\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\sigma)}_{\tilde{Q}^2_{\mu\nu}(\partial A,\partial A)} \\ &+O(|h||\partial A|^2)\,.\end{aligned}$$

On peut montrer, en utilisant le lemme 6.1 que

$$|\tilde{Q}^1_{\mu\nu}(\partial A, \partial A) + \tilde{Q}^2_{\mu\nu}(\partial A, \partial A)| \leq |\bar{\partial} A||\partial A| + O(|h||\partial A|^2)\,. \tag{6.12}$$

De plus,

$$\begin{aligned}|\tilde{P}_{\mu\nu}(\partial A, \partial A)|_{\mathcal{TU}} &= |m^{\alpha\beta}\partial_\mu A_\beta \partial_\nu A_\alpha|_{\mathcal{TU}} \\ &= \sum_{T\in\mathcal{T}, U\in\mathcal{U}} |m^{\alpha\beta}\partial_\mu A_\beta \partial_\nu A_\alpha T^\mu U^\nu| \\ &\leq C|\bar{\partial} A||\partial A|\,.\end{aligned} \tag{6.13}$$

(6.12) et (6.13) implique le résultat souhaité.

Preuve de (6.10) *:* On a

$$F_\sigma^A(h)(\partial h, \partial A) = \underbrace{m^{\nu\beta}m^{\mu\alpha}\partial_\mu h_{\nu\sigma}\partial_\alpha A_\beta}_{a} - \underbrace{m^{\nu\beta}m^{\mu\alpha}\partial_\mu h_{\nu\sigma}\partial_\beta A_\alpha}_{b} + \underbrace{m^{\rho\mu}m^{\lambda\alpha}\partial_\sigma h_{\rho\lambda}\partial_\mu A_\alpha}_{c} + O(|h||\partial h||\partial A)\,. \tag{6.14}$$

Comme $m^{\underline{L}\underline{L}} = 0$, on a clairement $|a| \leq |\bar\partial h||\partial A| + |\bar\partial A||\partial h|$.

Pour b, si $(\beta, \mu) \neq (\underline{L}, \underline{L})$, l'estimation est triviale. Si $(\beta, \mu) = (\underline{L}, \underline{L})$, on est amené à estimer $-m^{L\underline{L}}m^{\underline{L}L}\partial_{\underline{L}} h_{L\sigma}\partial_{\underline{L}} A_L$ et le résultat suit en utilisant le lemme 6.1.

Pour c, la seule estimation non triviale intervient quand $(\mu, \sigma) = (\underline{L}, \underline{L})$, i.e. on doit estimer

$$m^{L\underline{L}}m^{\lambda\alpha}\partial_{\underline{L}} h_{L\lambda}\partial_{\underline{L}} A_\alpha\,. \tag{6.15}$$

Or, la condition d'harmonicité (1.4), écrite sous la forme

$$g^{\beta\mu}\partial_\mu g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\,,$$

nous donne

$$\begin{aligned} m^{L\underline{L}}\partial_{\underline{L}} h_{L\lambda} =& m^{\underline{L}L}\partial_\lambda h_{\underline{L}L} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} m^{S^iS^j}\partial_\lambda h_{S^iS^j} \\ & - m^{\underline{L}L}\partial_L h_{\underline{L}\lambda} - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} m^{S^iS^j}\partial_{S^i} h_{S^j\lambda} - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} m^{S^iS^j}\partial_{S^j} h_{S^i\lambda} + O(|h||\partial h|)\,. \end{aligned} \tag{6.16}$$

En injectant (6.16) dans (6.15), on s'aperçoit que si $\lambda \neq \underline{L}$, on aboutit facilement à l'estimation voulue. Si $\lambda = \underline{L}$, le seul terme non nul est pour $\alpha = L$ et on utilise le lemme 6.1 pour conclure.

6.2 Estimations de $|\partial Z^I h|_{\mathcal{LT}}$ et $|\partial Z^I h|_{\mathcal{LL}}$

Dans ce paragraphe, on explique pourquoi la condition harmonique donne une information supplémentaire sur les termes du type $Z^I H_{LL}$. Commençons par montrer que la divergence d'un champ de vecteur F peut s'exprimer relativement à la famille $\mathcal{U} = \{L, \underline{L}, S_1, S_2, ..., S_{n-1}\}$ (cf. section 12.3 pour les notations) de la manière suivante :

$$\sum_{\mu=0}^{n} \partial_\mu F^\mu = \sum_{\mu=0}^{n} L_\mu \partial_q F^\mu - \sum_{\mu=0}^{n} \underline{L}_\mu \partial_s F^\mu + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} S_{i\mu} \partial_{S_i} F^\mu \,. \tag{6.17}$$

Preuve de (6.17) *:* On peut écrire :

$$\sum_{\mu=0}^{n} \partial_\mu F^\mu = \sum_{\mu=0}^{n} \delta_\mu^\alpha \partial_\alpha F^\mu \,. \tag{6.18}$$

En utilisant que $m(L, L) = m(\underline{L}, \underline{L}) = 0$, que $m(\underline{L}, L) = m(L, \underline{L}) = -2$ et que, pour $1 \leq i, j \leq n-1$, $m(S_i, S_j) = \delta^{ij}$, on a aussi :

$$m_{\mu\nu} = -L_\mu \underline{L}_\nu - L_\nu \underline{L}_\mu + \sum_{i=1}^{n-1} S_{i\,\mu} S_{i\,\nu} \,. \tag{6.19}$$

On a donc :

$$\delta_\mu^\alpha = -\frac{L_\mu \underline{L}^\alpha}{2} - \frac{\underline{L}_\mu L^\alpha}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} S_{i\,\mu} S_i^\alpha \,. \tag{6.20}$$

Ceci entraîne bien :

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{n} \partial_\mu F^\mu &= -\sum_{\mu=0}^{n} L_\mu \frac{\underline{L}^\alpha}{2} \partial_\alpha F^\mu - \sum_{\mu=0}^{n} \underline{L}_\mu \frac{L^\alpha}{2} \partial_\alpha F^\mu + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} S_{i\,\mu} S_i^\alpha \partial_\alpha F^\mu \\ &:= \sum_{\mu=0}^{n} L_\mu \partial_q F^\mu - \sum_{\mu=0}^{n} \underline{L}_\mu \partial_s F^\mu + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} S_{i\mu} \partial_{S_i} F^\mu \,. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Cette écriture est utilisée dans la démonstration du lemme 8.1 de [14], un élément clef de la construction, qu'on reprend ici pour s'assurer qu'il reste vrai en toute dimension :

Lemme 6.3. *Supposons que* $|H| \leq 1/4$. *Alors*

$$|\partial H|_{\mathcal{LT}} \leq C \left(|\bar{\partial} H| + |H| |\partial H| \right) \,. \tag{6.22}$$

Preuve du lemme 6.3 : La condition d'harmonicité (1.4) peut s'écrire

$$\partial_\mu \left(g^{\mu\nu} \sqrt{|\det g|} \right) = 0 \quad \forall \nu = 0, ..., n \,. \tag{6.23}$$

Or, on a

$$g^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|} = (m^{\mu\nu} + H^{\mu\nu})(1 - \frac{1}{2}trH + O(H^2))\,, \tag{6.24}$$

où $H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$. Ainsi, la condition harmonique entraîne

$$\partial_\mu \left(H^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^{\mu\nu}trH + O^{\mu\nu}(H^2) \right) = 0\,. \tag{6.25}$$

En posant

$$F^\mu = H^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^{\mu\nu}trH + O^{\mu\nu}(H^2)\,,$$

et en utilisant la décomposition (6.17), on obtient

$$|L_\mu \partial(H^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^{\mu\nu}trH)| \leq C\left(|\bar{\partial}H| + |H||\partial H|\right)\,. \tag{6.26}$$

Enfin, en contractant avec T_ν, où $T \in \mathcal{T}$ (cf. section 12.3 pour les notations), et en utilisant que $m_{TL} = 0$, on obtient le résultat souhaité.

Ce résultat peut être généralisé pour estimer les termes $|Z^I H|_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$. On obtient alors la proposition suivante (proposition 8.2 de [14] avec $n \geq 3$) :

Proposition 6.4 (condition harmonique)**.** *Soient g une métrique Lorentzienne satisfaisant (1.4) relativement à un système de coordonnées $\{x^\mu\}_{\mu=0,\ldots,n}$ et I un multi-index. Supposons que $H^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - m^{\mu\nu}$ vérifie la condition*

$$|Z^J H| \leq C, \quad \forall |J| \leq |I|/2, \quad \forall Z \in \mathcal{Z} \tag{6.27}$$

Alors il existe une constante C' telle que

$$|\partial Z^I H|_{\mathcal{L}\mathcal{T}} \leq C'\left(\sum_{|J|\leq|I|}|\bar{\partial}Z^J H| + \sum_{|J|\leq|I|-1}|\partial Z^J H| + \sum_{|I_1|+|I_2|\leq|I|}|Z^{I_2}H||\partial Z^{I_1}H|\right)\,, \tag{6.28}$$

$$|\partial Z^I H|_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \leq C'\left(\sum_{|J|\leq|I|}|\bar{\partial}Z^J H| + \sum_{|J|\leq|I|-1}|\partial Z^J H|_{\mathcal{L}\mathcal{T}} + \sum_{|J|\leq|I|-2}|\partial Z^J H| + \sum_{|I_1|+|I_2|\leq|I|}|Z^{I_2}H||\partial Z^{I_1}H|\right)\,. \tag{6.29}$$

Les mêmes estimations sont valables pour $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - m_{\mu\nu}$.

Preuve : cf. [14, Appendix D]. La preuve utilise uniquement la condition harmonique (1.4) et ne nécessite donc aucune modification dans le cas des équations d'Einstein-Maxwell. La généralisation du résultat pour les dimensions $n \geq 3$ est évidente.

Remarque 6.5. *La condition* (6.27) *est assurée par le corollaire* 5.1.

Cette proposition entraîne en particulier le résultat suivant (qui permet d'assurer une partie de l'hypothèse (8.1) du théorème 8.1) :

Corollaire 6.6. *Soit $h = h^1 + h^0$ une solution du système réduit d'Einstein-Maxwell* (2.9). *Supposons que h^1 vérifie* (3.3) *sur* $[0, T]$. *Alors pour tout $t \in [0, T]$ on a*

$$|\partial h|_{\mathcal{LT}} + |\partial Z h|_{\mathcal{LL}} \leq \begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{-1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-\delta}, & q > 0 \, . \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{-1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{1/2}, & q < 0 \, . \end{cases} \tag{6.30}$$

$$|h|_{\mathcal{LT}} + |Z h|_{\mathcal{LL}} \leq \begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}}, & q > 0 \, . \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}}(1+|q|)^{1/2+\delta}, & q < 0 \, . \end{cases} \tag{6.31}$$

Ce corollaire est l'équivalent (en dimension $n \geq 3$) des résultats (10.1) et (10.2) de [14]. Les outils principaux de la preuve sont la proposition 6.4 et le corollaire 5.1.

7 Estimations fortes de décroissance

Dans cette section, on améliore, quand $n = 3$, les estimations du corollaire 5.1 . Ces estimations améliorées sont présentées dans la proposition 7.1 . On note que pour les dimensions d'espace $n \geq 4$, cette proposition peut être directement déduite du corollaire 5.1 (la terminologie "estimations fortes" n'est donc pertinente qu'en dimension $n = 3$) ; les nouvelles estimations dîtes fortes serviront d'hypothèses pour le théorème 8.1. En comparaison de [14], la difficulté vient de l'étude des nouveaux termes introduits par l'équation de Maxwell.

C'est essentiellement le corollaire 7.2 de [14] (repris ici dans la proposition (11.3)) et les estimations de la section 6 sur le terme F_M qui permettent de montrer le résultat suivant :

Proposition 7.1 (Estimations fortes de décroissance)**.** *Soit* $(h = h^1 + h^0, A)$ *une solution des équations réduites d'Einstein-Maxwell* (2.9)*. Supposons que* (h^1, A) *vérifie* (3.3) *sur l'intervalle* $[0, T]$*. Alors pour tout* $t \in [0, T]$*, on a :*

(7.1) *pour* $n = 3$, $|\partial A| + |\partial h|_{\mathcal{TU}} \leq C\varepsilon(1 + t + |q|)^{-1}$,

(7.2) *pour* $n = 3$, $|\partial h| \leq C\varepsilon t^{-1} \ln t$,

(7.3) *pour* $n \geq 4$, $|\partial A| + |\partial h| \leq C\varepsilon(1 + t + |q|)^{-1}$.

Sous les mêmes hypothèses, soient $\gamma' < \gamma - \delta$ *et* $\mu' > \delta > 0$ *fixés. Alors il existe des constantes* M_k *et* C_k*, dépendant de* (γ', μ', δ)*, telles que, pour* $n \geq 3$ *:*

(7.4)
$$|\partial Z^I A(t,x)| + |\partial Z^I h^1(t,x)| \leq \begin{cases} C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{-1-\gamma'}, & q > 0 , \\ C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{-1/2+\mu'}, & q < 0 , \end{cases} \quad |I| = k \leq N/2 + 2 ,$$

(7.5)
$$|Z^I A(t,x)| + |Z^I h^1(t,x)| \leq \begin{cases} C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{-\gamma'}, & q > 0 , \\ C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{1/2+\mu'}, & q < 0 , \end{cases} \quad |I| = k \leq N/2 + 2 ,$$

(7.6)
$$|\bar\partial Z^I A(t,x)| + |\bar\partial Z^I h^1(t,x)| \leq \begin{cases} C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-2+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{-\gamma'}, & q > 0 , \\ C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-2+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{1/2+\mu'}, & q < 0 , \end{cases} \quad |I| = k \leq N/2 + 1 .$$

Les mêmes estimations sont vraies pour h^0 *avec* γ' *remplacée par* $M_k\varepsilon$*.*

Preuve de (7.1)*,* (7.2) *et* (7.3) *:*

•Montrons tout d'abord que $|\partial A| \leq C\varepsilon(1 + t + |q|)^{-1}$ quand $n = 3$.

Posons $n(t) = (1+t+|q|)|\partial A|$.
En utilisant la proposition 11.3 avec $\phi = A$ et $F = F^A$, et $\bar{w}(q) = 1$ (donc $\alpha = 0$)), on a :

$$\text{(7.7)} \qquad n(t) \leq \underbrace{C \sup_{0\leq t\leq \tau} \sum_{|I|\leq 1} \|Z^I A\|_{L^\infty}}_{(I)} + \underbrace{C\int_0^t (1+\tau)\|F^A\|_{L^\infty(D_\tau)}\,d\tau}_{(II)}$$
$$+ \underbrace{C\int_0^t \sum_{|I|\leq 2}(1+\tau)^{-1}\|Z^I A\|_{L^\infty(D_\tau)}\,d\tau}_{(III)}\ .$$

Montrons que (I), (II) et (III) sont majorés par $C\varepsilon$.

$(I) \leq C\varepsilon$ d'après le corollaire 5.1.
Dans D_τ, on a $1+\tau \sim 1+\tau+|r-\tau|$ (au sens où il existe des constantes positives C_1 et C_2 telles que $C_1(1+\tau) \leq 1+\tau+|r-\tau| \leq C_2(1+\tau)$), d'où, en utilisant le corollaire 5.1 :

(7.8)
$$\begin{aligned}(III) \leq& C\varepsilon \int_0^t \sum_{|I|\leq 2}(1+\tau+|r-\tau|)^{-1}(1+\tau+|r-\tau|)^{-1+\delta}(1+\tau+|r-\tau|)^{1/2}\\ \leq& C\varepsilon\int_0^t (1+\tau+|r-\tau|)^{-1+(\delta-1/2)}\\ \leq& C\varepsilon\int_0^t(1+\tau+|r-\tau|)^{-1-a}, \quad \text{avec } a>0\\ \leq& C\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant le lemme 6.2 et le corollaire 5.1, on obtient :

(7.9)
$$\begin{aligned}(II) \leq& C\int_0^t (1+\tau)\||\bar{\partial}h||\partial A| + |\bar{\partial}A||\partial h| + O(|h||\partial h||\partial A|)\|_{L^\infty(D_\tau)}\\ \leq& C\varepsilon\int_0^t (1+\tau+|r-\tau|)(1+\tau+|r-\tau|)^{\delta-3/2}(1+\tau+|r-\tau|)^{-1+\delta}(1+|r-\tau|)^{-1/2}\\ \leq& C\varepsilon\int_0^t(1+|r-\tau|)^{-2+2\delta}\\ \leq& C\varepsilon\int_0^t(1+|r-\tau|)^{-1-a}, \quad \text{avec } a>0\\ \leq& C\varepsilon\,.\end{aligned}$$

• Pour les estimations sur h de (7.1) et (7.2), on peut adapter les preuves de (10.3) et (10.4) de [14]. En effet, en utilisant le lemme 6.2 et le corollaire 5.1, on montre le lemme suivant :

Lemme 7.2. *Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition 7.1 et* $(F, \tilde{F})$ *tel que dans* (2.13) *. Alors*

$$|F + \tilde{F}|_{\mathcal{TU}} \leq C\varepsilon t^{\frac{-3}{2}+\delta}|\partial h| + C\varepsilon t^{\frac{-3}{2}+\delta}|\partial A|\,, \tag{7.10}$$

$$|F + \tilde{F}| \leq C\varepsilon t^{\frac{-3}{2}+\delta}|\partial h| + C\varepsilon t^{\frac{-3}{2}+\delta}|\partial A| + C|\partial h|^2_{\mathcal{TU}} + C|\partial A|^2\,. \tag{7.11}$$

En utilisant la proposition 11.3, ainsi que $|\partial A| \leq C\varepsilon(1+t)^{-1}$, on a :

Lemme 7.3. *Avec une constante* C *dépendant de* $\gamma > 0$

(7.12)

$$(1+t)\||\partial h|_{\mathcal{TU}}(t,.) + |\partial A|(t,.)\|_{L^\infty} \leq C\varepsilon + C\varepsilon \int_0^t (1+\tau)^{\delta-\frac{1}{2}}\|\partial h(\tau,.) + \partial A(\tau,.)\|_{L^\infty}\, d\tau\,.$$

(7.13)

$$\begin{aligned}(1+t)\||\partial h|(t,.) + |\partial A|(t,.)\|_{L^\infty} &\leq C\varepsilon \\ &+ C\varepsilon \int_0^t (1+\tau)^{\delta-\frac{1}{2}}\|\partial h(\tau,.) + \partial A(\tau,.)\|_{L^\infty} + (1+\tau)\||\partial h|_{\mathcal{TU}}(\tau,.) + |\partial A|(\tau,.)\|^2_{L^\infty}\, d\tau\,.\end{aligned}$$

Et on conclut en utilisant le lemme 10.7 de [14] repris ci-dessous avec

$$b(t) = (1+t)\||\partial h|_{\mathcal{TU}}(t,.) + |\partial A|(t,.)\|_{L^\infty}\,,$$

$$c(t) = (1+t)\||\partial h|(t,.) + |\partial A|(t,.)\|_{L^\infty}\,,$$

et $a = 1/2 - \delta$.

Lemme 7.4 (lemme 10.7 de [14])**.** *Supposons que les fonctions* $b(t) \geq 0$ *et* $c(t) \geq 0$ *satisfont*

$$b(t) \leq C\varepsilon\Big(\int_0^t (1+s)^{-1-a}c(s)\, ds + 1\Big)\,, \tag{7.14}$$

$$c(t) \leq C\varepsilon\Big(\int_0^t (1+s)^{-1-a}c(s)\, ds + 1\Big) + C\int_0^t (1+s)^{-1}b^2(s)\, ds\,, \tag{7.15}$$

pour certaines constantes positives telles que $a \geq C^2\varepsilon$ *et* $a \geq 4C\varepsilon/(1-2C\varepsilon)$*. Alors*

$$b(t) \leq 2C\varepsilon, \qquad \text{et} \qquad c(t) \leq 2C\varepsilon\big(1 + a\ln(1+t)\big)\,. \tag{7.16}$$

•(7.3) découle du corollaire 5.1.

Preuve de (7.4), (7.5) *et* (7.6) *:*

Pour une dimension d'espace $n \geq 4$, le résultat découle du corollaire 5.1.

Pour $n = 3$, on adapte la preuve de (10.5) de [14] : on suppose que (7.4) est vraie pour $|I| \leq k$ et on cherche à prouver l'estimation pour $|I| = k+1$ (les arguments ci-dessous pouvant être appliqués au cas $k = 0$). D'après (11.27) on a pour tout $|I| \leq N/2+2$:
(7.17)

$$|Z^I F_M| \leq C\varepsilon \sum_{|K|\leq|I|} \frac{|\partial Z^K h| + |\partial Z^K A|}{1+t} + C \sum_{|J|+|K|\leq|I|, |J|\leq|K|<|I|} (|\partial Z^J h| + |\partial Z^J A|)(|\partial Z^K h| + |\partial Z^K A|)\,.$$

On peut alors faire appel à la proposition 5.3 de [14], qui est encore vraie en dimension $n \geq 3$:

Proposition 7.5 (Proposition 5.3 de [14])**.** *Soit $\tilde{\Box}_g = \Box + H^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$. Alors, pour tout $Z \in \mathcal{Z}$, on a , en notant $\hat{Z} = Z + c_Z$ où c_Z est défini par $[Z, \Box] = -c_Z\Box$:*
(7.18)

$$|\tilde{\Box}_g Z^I \phi - \hat{Z}^I \tilde{\Box}_g \phi| \leq C\Bigg(\frac{1}{1+t+|q|} \sum_{|K|\leq|I|} \sum_{|J|+(|K|-1)_+\leq|I|} |Z^J H||\partial Z^K \phi|$$
$$+ \frac{1}{1+|q|} \sum_{|K|\leq|I|} \Big(\sum_{|J|+(|K|-1)_+\leq|I|} |Z^J H|_{\mathcal{LL}} + \sum_{|J_1|+(|K|-1)_+\leq|I|-1} |Z^{J_1} H|_{\mathcal{LT}} + \sum_{|J_2|+(|K|-1)_+\leq|I|-2} |Z^{J_2} H| \Big) |\partial Z^K \phi| \Bigg),$$

où $(|K|-1)_+ = |K|-1$ si $|K| \geq 1$ et $(|K|-1)_+ = 0$ si $|K| = 0$.

Ainsi, utilisant la proposition 5.3 de [14] (avec $\phi = \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$ et $F = F_M$), on a
(7.19)

$$|\tilde{\Box}_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}| \leq C \left(|Z^I F_M| + |Z^I F^0| + (1+t+|q|)^{-1} \sum_{|K|\leq|I|, |J|+(|K|-1)_+\leq|I|} |Z^J H| \left(|\partial Z^K h^1| + |\partial Z^K A| \right) \right)$$
$$+ \frac{C}{1+|q|} \sum_{|K|\leq|I|} \left(\sum_{|J|+(|K|-1)_+\leq|I|} |Z^J H|_{\mathcal{LL}} + \sum_{|J'|+(|K|-1)_+\leq|I|-1} |Z^{J'} H|_{\mathcal{LT}} + \sum_{|J''|+(|K|-1)_+\leq|I|-2} |Z^{J''} H| \right) \left(|\partial Z^K h^1| + |\partial Z^K A| \right).$$

Et on conclut en posant

$$n_{k+1}(t) = (1+t+|q|) \sum_{|I|\leq k+1} \|\bar{w}(q) \left(|\partial Z^I h^1| + |\partial Z^I A| \right)\|_{L^\infty}$$

et en se servant des estimations de décroissance de la proposition 11.3 avec $\phi = Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$.
En effet, la proposition 11.3 entraîne (en utilisant le corollaire 5.1) :
(7.20)

$$n_{k+1}(t) \leq \underbrace{C\varepsilon + C\varepsilon \int_0^t (1+\tau)^{-1} \left(\varepsilon n_{k+1}(t) + \varepsilon^2 (1+\tau)^{C\varepsilon} + \varepsilon (1+\tau)^{-\frac{1}{2}-\mu'}\right) d\tau}_{N(t)} .$$

On doit montrer que $N(t) \leq C\varepsilon(1+t)^{C\varepsilon}$ pour une certaine constante C. Or

$$|N'(t)| \leq C(1+\tau)^{-1} \left(\varepsilon n_{k+1}(t) + \varepsilon^2 (1+\tau)^{C\varepsilon} + \varepsilon (1+\tau)^{-\frac{1}{2}-\mu'}\right) \tag{7.21}$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{d'après (7.20)}} C\varepsilon (1+t)^{-1} \left(N(t) + \varepsilon(1+t)^{C\varepsilon}\right) . \tag{7.22}$$

Ainsi
(7.23)

$$\begin{aligned}
(N(t)(1+t)^{-2C\varepsilon})' &= (1+t)^{-2C\varepsilon}(N'(t) - 2C\varepsilon N(t)(1+t)^{-1}) \\
&\underbrace{\leq}_{\text{d'après (7.22)}} (1+t)^{-2C\varepsilon} \left(C\varepsilon^2 (1+t)^{-1+C\varepsilon} + \underbrace{C\varepsilon(1+t)^{-1}N(t) - 2C\varepsilon N(t)(1+t)^{-1}}_{\leq 0} \right) \\
&\leq C\varepsilon^2 (1+t)^{-1-C\varepsilon} .
\end{aligned}$$

On a donc pour une certaine constante C'

$$N(t)(1+t)^{-2C\varepsilon} - N(0) \leq C'\varepsilon . \tag{7.24}$$

D'où

$$N(t) \leq (C' + C)\varepsilon (1+t)^{2C\varepsilon} . \tag{7.25}$$

Ceci prouve (7.4).

De la même façon que (5.2) vient de (5.1), l'estimation (7.5) suit en intégrant (7.4) le long de ($\omega = y/|y|, \tau + |y| = \mathit{constante}$) à partir de l'hyperplan $t = 0$, en utilisant (5.8) avec $n = 3$:

$$\forall\ |I| \leq N-2 \qquad |\partial Z^I h^1(0,x)| + |\partial Z^I A(0,x)| \leq C\varepsilon(1+|x|)^{-2-\gamma}.$$

• Enfin, (7.6) vient de (7.5) et de l'inégalité (valable pour toute fonction ϕ) :

$$|\bar{\partial} Z^I \phi| \leq C \frac{1}{1+t+|q|} \sum_{|J| \leq |I|+1} |Z^J \phi| . \tag{7.26}$$

Remarque 7.6. *Pour montrer les estimations fortes de la proposition* 7.1 *quand* $n = 3$*, on se sert des estimations faibles du corollaire* 5.1*, en particulier de* (5.3) *valable pour* $|I| \leq N - 3$*. On a ainsi besoin de la condition* $\frac{N}{2} + 2 \leq N - 3$ *qui s'écrit* $N \geq 10$.
Pour $n \geq 4$*, on a pas besoin de cette condition ici. Parcontre, on utilise à plusieurs reprises dans l'estimation de* $|Z^I F_M|$ *que* $\frac{N-1}{2} \leq N - \left[\frac{n+2}{2}\right] - 1$ *i.e.* $N \geq 2\left[\frac{n+2}{2}\right] + 1$*.(cf. par exemple le calcul* (11.19)*).*
C'est pourquoi, dans l'énoncé du théorème 3.1*, on impose la condition* $N \geq 2\left[\frac{n+2}{2}\right] + 6$ *qui est suffisante pour tout* $n \geq 3$*.*

8 Estimation forte d'énergie

Le théorème qui suit permet de terminer la preuve du théorème 3.1. Les résultats des sections 5, 6 et 7 assurent que les hypothèses (8.1) et (8.2) sont bien vérifiées pour le problème qui nous intéresse.

Théorème 8.1 (Estimation forte d'énergie). *Soit* $(g_{\mu\nu}(t) = h_{\mu\nu}(t)+m_{\mu\nu}(t), A_\sigma(t))$ *une solution locale en temps des équations d'Einstein-Maxwell réduites (2.9) satisfaisant la condition harmonique* (1.4) *et la jauge de Lorenz* (1.5) *sur l'intervalle* $[0,T]$. *Supposons aussi que pour certains* $0 < \mu' < \frac{1}{2}$ *et* $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, *on ait les estimations suivantes pour* $0 \leq t \leq T$ *et pour tout multi-indices* $|I| \leq N/2+1$ *:*

$$(8.1)\quad |\partial A|+|\partial H|_{\mathcal{TU}}+(1+|q|)^{-1}|H|_{\mathcal{TL}}+(1+|q|)^{-1}|ZH|_{\mathcal{LL}} \leq C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1},$$

(8.2)

$$|\partial Z^I \begin{pmatrix} h \\ A \end{pmatrix}|+\frac{|Z^I \begin{pmatrix} h \\ A \end{pmatrix}|}{1+|q|}+\frac{1+t+|q|}{1+|q|}(|\bar{\partial} Z^I \begin{pmatrix} h \\ A \end{pmatrix}|) \leq \begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+C\varepsilon}(1+|q|)^{-1-C\varepsilon}, & q>0\,, \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+C\varepsilon}(1+|q|)^{-1/2+\mu'}, & q<0\,, \end{cases}$$

$$(8.3)\qquad \sqrt{\mathcal{E}_N^{Maxwell}(0)}+M \leq \varepsilon \quad si\ n=3\,,$$
$$\sqrt{\mathcal{E}_N^{Maxwell}(0)} \leq \varepsilon \quad si\ n \geq 4\,.$$

Soit $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t)$ *définie par* (12.10), *alors il existe une constante c indépendante de T telle que si* $\varepsilon \leq c^{-2}$ *on a l'estimation d'énergie :*

$$(8.4)\qquad \mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) \leq C_N\varepsilon^2(1+t)^{c\varepsilon}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

où C_N *est une constante dépendant uniquement de* N.

8.1 Fin de la preuve du théorème 3.1

Rappelons que T a été défini comme le temps maximal tel que l'inégalité d'énergie (3.3)

$$\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) \leq 2C_N\varepsilon^2(1+t)^{2\delta}\,,$$

soit vraie pour $0 \leq t \leq T$. Ayant supposé cette inégalité, on a pu établir la proposition 7.1. Or, on peut vérifier que les hypothèses (8.1) et (8.2) du théorème 8.1 sont assurées par le corollaire 6.6 et la proposition 7.1.

La conclusion du théorème 8.1 montre qu'on a alors :

$$(8.5)\qquad \mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) \leq C_N\varepsilon^2(1+t)^{c\varepsilon}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Par conséquent, si on choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on peut montrer que $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) \leq C_N \varepsilon^2 (1+t)^{2\delta}$, contredisant, par un argument de continuité, la maximalité de T et entraînant que (g, A) est une solution globale. Le fait que $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$ est alors géodésiquement complète peut être établi par des arguments similaires à ceux de [15] (cf.section 9).

8.2 Preuve du théorème 8.1

Dans un premier temps, on cherche à appliquer l'inégalité d'énergie de la proposition 11.2 à la fonction $\phi = Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$.

En notant $\hat{Z} = Z + c_Z$ où c_Z est défini par $[Z, \Box] = -c_Z \Box$, on a :

$$\tilde{\Box}_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} = \tilde{\Box}_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} - \hat{Z}^I \tilde{\Box}_g \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} + \hat{Z}^I \tilde{\Box}_g \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} . \tag{8.6}$$

Posant $D_M^I = \tilde{\Box}_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} - \hat{Z}^I \tilde{\Box}_g \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$, on a, d'après (2.13) et (8.6) :

$$|\tilde{\Box}_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}| \leq |D_M^I| + |Z^I F_M| + |Z^I F^0| , \tag{8.7}$$

où $F^0 = \tilde{\Box}_g h^0$. On arrive ainsi, en utilisant la proposition 11.2, à :

(8.8)

$$\int_{\sum_t} |\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 w + \int_0^t \int_{\sum_t} |\bar{\partial} Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 w' \leq 8 \int_{\sum_0} |\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 w + C\varepsilon \int_0^t \int_{\sum_t} \frac{|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2}{(1+\tau)} w$$

$$+ 16 \underbrace{\int_0^t \int_{\sum_t} \varepsilon^{-1} (|Z^I F_M|^2 (1+\tau) w}_{(i)} + 16 \underbrace{\int_0^t \int_{\sum_t} \varepsilon^{-1} |D_M^I|^2)(1+\tau) w}_{(ii)}$$

$$+ 16 \underbrace{\int_0^t \int_{\sum_t} |Z^I F^0| |\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}| w}_{(iii)} .$$

Ici, la principale difficulté réside dans l'obtention d'une majoration satisfaisante des termes à droite de (8.8). Les estimations de (i), (ii) et (iii) font respectivement l'objet des lemmes 8.2, 8.3 et 8.4 suivants.

Lemme 8.2. *Pour tout $|I| \leq N$ on a :*

(8.9)

$$\int_0^t \int_{\sum_t} \varepsilon^{-1}(|Z^I F_M|^2(1+\tau)w \leq C\varepsilon \sum_{|J|\leq|I|} \int_0^t \int_{\sum_t} \left(\frac{|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2}{(1+\tau)} w + |\bar{\partial} Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 w' \right)$$
$$+ C\varepsilon \sum_{|J|\leq|I|-1} \int_0^t \int_{\sum_t} \frac{|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2}{(1+\tau)^{1-2C\varepsilon}} w + C\varepsilon^3 .$$

Preuve : On peut montrer (cf. Annexe 11.2, (11.8)) une estimation de $|Z^I F_M|$ analogue à celle de $|Z^I F|$ du lemme 11.2 de [14], avec bien sûr les modifications nécessaires dûes aux dimensions et aux termes provenant des équations de Maxwell . Cette estimation (11.8) est très importante et s'appuie sur le fait que le terme source F_M possède la bonne structure, comme cela a été vérifié dans la section 2. Partant de (11.8) et en utilisant l'inégalité de Hardy de la proposition 11.4 :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+\tau+|q|} \frac{|Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2}{(1+|q|)^2} w\, d^n x \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2}{1+\tau+|q|} w\, d^n x\,, \tag{8.10}$$

ainsi que les inégalités $w \leq w'(1+|q|)(1+q_-)^{2\mu}$ et $2\mu < 1-2\mu'$, on obtient le résultat souhaité.

Lemme 8.3. *Pour tout $|I| \leq N$, on a :*

(8.11)

$$\varepsilon^{-1} \int_0^t \int_{\sum_t} |\tilde{\Box}_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} - \hat{Z}^I \tilde{\Box}_g \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 (1+\tau) w \leq C\varepsilon \sum_{|J|\leq|I|} \int_0^t \int_{\sum_t} \left(\frac{|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2}{(1+\tau)} w + |\bar{\partial} Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 w' \right)$$
$$+ C\varepsilon \sum_{|J|\leq|I|-1} \int_0^t \int_{\sum_t} \frac{|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2}{(1+\tau)^{1-2C\varepsilon}} w + C\varepsilon^3 .$$

Preuve : On peut s'appuyer sur la preuve du lemme 11.5 de [14], en s'assurant qu'elle se généralise en dimension quelconque : on trouve une estimation analogue à (11.21) de [14] avec h^1 remplacée par $\begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$. La preuve est ensuite séparéé en deux parties selon que $|K| \leq N/2+1$ ou que $|K| \geq N/2$.

Lemme 8.4. *Pour tout $|I| \leq N$ on a, en notant $F^0 = \tilde{\Box}_g h^0$:*

(8.12)
$$\int_0^t \int_{\sum_t} |Z^I F^0||\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|w$$
$$\leq C_N \varepsilon \sum_{|J|\leq|I|} \left(\int_0^t \int_{\sum_t} \frac{|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2}{(1+\tau)^2} w + \int_0^t \left(\int_{\sum_t} |\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 w\, dx \right)^{1/2} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

où C_N est une constante qui ne dépends que de N.

Preuve :

On s'inspire de la preuve du lemme 11.4 de [14] en prenant $\begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$ à la place de h^1 et en vérifiant que les nouveaux termes peuvent être traités d'une façon semblable.
Quand $n \geq 4$, on rappelle que $h^0 = 0$ et l'estimation est triviale. Considérons donc ici que $n = 3$. Posons $F^0 = \tilde{\Box}_g h^0 = F^{00} + F^{01}$ avec $F^{00} = \Box h^0$ et $F^{01} = H^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h^0$. Comme $h^0 = \chi(r)\chi(r/t)\frac{2M}{r}$, on calcule que

(8.13)

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i} h^0 =& \chi(r)\left(\frac{2Mx_i}{r^2 t}\chi'(r/t) - \frac{2Mx_i}{r^3}\chi(r/t)\right) + \frac{2Mx_i}{r^2}\chi'(r)\chi(r/t)\,. \\
\partial^2_{x_i} h^0 =& \chi(r)\left(\frac{2M(r^2-2x_i^2)}{r^4 t}\chi'(r/t) + \frac{2Mx_i^2}{r^3t^2}\chi''(r/t) - \frac{2M(r^2-3x_i^2)}{r^5}\chi(r/t) - \frac{2Mx_i^2}{r^4 t}\chi'(r/t)\right) \\
&+ \chi'(r)\left(\frac{2Mx_i^2}{r^3 t}\chi'(r/t) - \frac{2Mx_i^2}{r^4}\chi(r/t)\right) + \frac{2Mx_i^2}{r^3}\chi''(r)\chi(r/t)\,. \\
\sum_{i=1}^3 \partial^2_{x_i} h^0 =& \frac{2M}{rt^2}\chi(r)\chi''(r/t) + \frac{2M}{rt}\chi'(r)\chi'(r/t) + \frac{2M}{r}\chi''(r)\chi(r/t) - \frac{2M}{r}\chi'(r)\chi(r/t)\,. \\
-\partial_t^2 h^0 =& -\chi(r)\left(\frac{4M}{t^3}\chi'(r/t) + \frac{2Mr}{t^4}\chi''(r/t)\right)\,.
\end{aligned}$$

On voit facilement que $F^{00} \equiv 0$ dès que $r/t \leq 1/2$ ou $r \leq 1/2$. Quand $r/t \geq 3/4$, on a $F^{00} \equiv 0$ dès que $r \geq 3/4$.
Dans les régions où $F^{00} \neq 0$, on montre que, pour tout $|I| \leq N$:

$$Z^I F^{00} \leq C_N \varepsilon (1+t+|q|)^{-3}\,.$$

On a même , lorsque $r/t \geq 3/4$ et $1/2 \leq r \leq 3/4$, pour tout $|I| \leq N$ et pour tout $a > 0$:

$$Z^I F^{00} \leq C_N \varepsilon (1 + t + |q|)^{-a} .$$

De plus, on a :

(8.14)

$$\begin{aligned}
\partial_t \partial_{x_i} h^0 =& - \frac{2Mx_i}{rt^3} \chi(r) \chi''(r/t) - \frac{2Mx_i}{rt^2} \chi'(r) \chi''(r/t) \\
\forall i \neq j\,, \quad \partial_{x_j} \partial_{x_i} h^0 =& \chi(r) \left(- \frac{6Mx_i x_j}{r^4 t} \chi'(r/t) + \frac{2Mx_i x_j}{r^3 t^2} \chi''(r/t) + \frac{6Mx_i x_j}{r^5} \chi(r/t) \right) \\
& + \chi'(r) \left(\frac{4Mx_i x_j}{r^3 t} \chi'(r/t) - \frac{6Mx_i x_j}{r^4} \chi(r/t) \right) + \frac{2Mx_i x_j}{r^3} \chi''(r) \chi(r/t) .
\end{aligned}$$

Ces résultats permettent de montrer que :

$$|Z^I F^{01}| \leq C_N \varepsilon (1 + t + |q|)^{-3} \sum_{|J| \leq |I|} |Z^J H| . \tag{8.15}$$

En utilisant le corollaire 5.1 pour estimer $|Z^J H|$, on obtient :

(8.16)

$$|Z^I F^{01}| \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 (1 + t + |q|)^{-4+\delta} (1 + |q|)^{-\delta} , & q > 0 , \\ C\varepsilon^2 (1 + t + |q|)^{-4+\delta} (1 + |q|)^{-\frac{1}{2}} , & q < 0 , \end{cases} \qquad |I| \leq N - 2 .$$

Il suit, pour $|I| \leq N$:

(8.17)

$$|Z^I F^0| \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 (1 + t + |q|)^{-4+\delta} (1 + |q|)^{-\delta} , & q > 0 , \\ C\varepsilon^2 (1 + t + |q|)^{-3} , & q < 0 , \end{cases} \qquad + \frac{C\varepsilon}{(1 + t + |q|)^3} \sum_{|J| \leq |I|} |Z^J h^1| .$$

Finalement, comme :

(8.18)

$$\int_0^t \int |Z^I F^0| |\partial Z^I \binom{h^1}{A}| w \, d^n x \, d\tau \leq \int_0^t \left(\int |Z^I F^0|^2 w \, d^n x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\partial Z^I \binom{h^1}{A}|^2 w \, d^n x \right)^{\frac{1}{2}} d\tau ,$$

l'équation 8.17 et l'inégalité de Hardy de la proposition 11.4 permettent de conclure.

Fin de la preuve du théorème 8.1 *:* En utilisant ces trois lemmes et (8.8) on a , pour $|I| \leq N$:

(8.19)

$$\int_{\sum_t} |\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 w + \int_0^t \int_{\sum_t} |\bar{\partial} Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 w'$$
$$\leq 8 \int_{\sum_0} |\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 w$$
$$+ C_N \varepsilon \sum_{|J| \leq |I|} \int_0^t \frac{1}{(1+\tau)^{3/2}} \left(\int_{\sum_t} |\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 w \right)^{1/2} d\tau$$
$$+ C\varepsilon \sum_{|J| \leq |I|} \int_0^t \int_{\sum_t} \left(\frac{|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2}{(1+\tau)} w + |\bar{\partial} Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2 w' \right)$$
$$+ C\varepsilon \sum_{|J| \leq |I|-1} \int_0^t \int_{\sum_t} \frac{|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|^2}{(1+\tau)^{1-2C\varepsilon}} w + C\varepsilon^3 .$$

Soit $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t)$ définie par (12.10), soit $\mathcal{S}_N^{Maxwell}(t)$ définie par (12.11), on a donc pour $0 \leq t \leq T$ et $0 \leq k \leq N$:

(8.20)
$$\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t) + \mathcal{S}_k^{Maxwell}(t) \leq 8\mathcal{E}_k^{Maxwell}(0) + C\varepsilon \mathcal{S}_k^{Maxwell}(t) + C\varepsilon^3$$
$$+ \int_0^t \frac{C\varepsilon \mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{1+\tau} d\tau + \int_0^t \frac{C_N \varepsilon \sqrt{\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}}{(1+\tau)^{3/2}} d\tau + \int_0^t \frac{C\varepsilon \mathcal{E}_{k-1}^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)^{1-C\varepsilon}} d\tau .$$

On peut alors conclure en choisissant $C\varepsilon \leq 1/2$ de tel sorte qu'on puisse absorber le terme $C\varepsilon \mathcal{S}_k^{Maxwell}(t)$ dans le terme de gauche $\mathcal{S}_k^{Maxwell}(t)$, multipliant ainsi par 2 les constantes du membre de droite :

(8.21)
$$\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t) + \mathcal{S}_k^{Maxwell}(t) \leq 16\mathcal{E}_k^{Maxwell}(0) + C\varepsilon^3$$
$$+ \int_0^t \frac{C\varepsilon \mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{1+\tau} d\tau + \int_0^t \frac{C_N \varepsilon \sqrt{\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}}{(1+\tau)^{3/2}} d\tau + \int_0^t \frac{C\varepsilon \mathcal{E}_{k-1}^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)^{1-C\varepsilon}} d\tau .$$

On voit ensuite que :

(8.22)

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{C_N\varepsilon\sqrt{\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}}{(1+\tau)^{3/2}}\,d\tau &\leq \int_0^t \frac{4C_N^2\varepsilon^2 + 1/4\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)^{3/2}}\,d\tau \\ &\leq C_N\varepsilon^2 + \int_0^t \frac{1/4\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)^{3/2}}\,d\tau \\ &\leq C_N\varepsilon^2 + 1/2\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t) \quad \text{car } \mathcal{E}_k^{Maxwell} \text{ est croissante}\,.\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(0) \leq \varepsilon^2$, on obtient alors, pour ε suffisamment petit :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t) + \mathcal{S}_k^{Maxwell}(t) \leq & C_N\varepsilon^2 \\ & + \int_0^t \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{1+\tau}\,d\tau + \int_0^t \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_{k-1}^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)^{1-C\varepsilon}}\,d\tau\,,\end{aligned} \tag{8.23}$$

où le dernier terme est absent pour $k = 0$ et C_N est une constante dépendant uniquement de N.

Pour $k = 0$, cela entraîne que :

$$\mathcal{E}_0^{Maxwell}(t) \leq C_N\varepsilon^2 + \int_0^t \frac{c_0\varepsilon\mathcal{E}_0^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)}\,d\tau\,. \tag{8.24}$$

On utilise alors le lemme de Gronwall suivant : Soient $\psi, y : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant :

$$\exists c \geq 0, \forall t \in [a,b] : \quad y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)y(s)\,ds\,,$$

alors :

$$\forall t \in [a,b] \quad y(t) \leq c\exp\left(\int_a^t \psi(s)\,ds\right).$$

Et on trouve :

$$\mathcal{E}_0^{Maxwell}(t) \leq C_N\varepsilon^2(1+t)^{c_0\varepsilon}. \tag{8.25}$$

En supposant que (8.4) est vraie au rang $k-1$, on obtient, d'après (8.23) :

$$\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t) \leq \underbrace{C_N\varepsilon^2 + \int_0^t \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{1+\tau}\,d\tau + \int_0^t \frac{C\varepsilon^3}{(1+\tau)^{1-C\varepsilon}}\,d\tau}_{G(t)}\,. \tag{8.26}$$

On voit que :

$$G'(t) \leq \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t)}{(1+t)} + \frac{C\varepsilon^3}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \underbrace{\leq}_{\text{d'après (8.26)}} \frac{C\varepsilon G(t)}{(1+t)} + \frac{C\varepsilon^3}{(1+t)^{1-C\varepsilon}}. \tag{8.27}$$

On a :

$$\left(G(t)(1+t)^{-C\varepsilon}\right)' = \left(G'(t) - \frac{C\varepsilon}{1+t}G(t)\right)(1+t)^{-C\varepsilon} \leq \frac{C\varepsilon^3}{1+t}. \tag{8.28}$$

Enfin, en utilisant que pour $t \geq 0$, on a $C\varepsilon \ln(1+t) \leq (1+t)^{C\varepsilon}$, on obtient par intégration :

$$\begin{aligned} G(t) &\leq G(0)(1+t)^{C\varepsilon} + C\varepsilon^3(1+t)^{C\varepsilon} \\ &\leq C_N\varepsilon^2(1+t)^{C\varepsilon} + C\varepsilon^3(1+t)^{2C\varepsilon} \\ &\leq C_N\varepsilon^2(1+t)^{2C\varepsilon}. \end{aligned} \tag{8.29}$$

Ceci termine la récurrence et la preuve du théorème.

On peut alors obtenir le corollaire suivant :

Corollaire 8.5. *Supposons* (8.3) *vérifiée pour un certain* $N \geq 2\left[\frac{n+2}{2}\right] + 6$, *et que, pour tout N', on ait :*

$$\mathcal{E}_{N'}^{Maxwell}(0) \leq \tilde{C} \tag{8.30}$$

alors, pour tout N', *il existe une constante* C *telle que :*

$$\mathcal{E}_{N'}^{Maxwell}(t) \leq C_{N'}(1+t)^C\,. \tag{8.31}$$

Preuve : L'hypothèse (8.3) étant vérifiée, on peut appliquer le théorème 8.1 et obtenir

$$\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t) \leq C_{k'}(1+t)^C \quad \textit{pour}\ 0 \leq k \leq N\,. \tag{8.32}$$

Soit $\delta'' < 1/4$, on peut supposer qu'il existe un temps T tel que :

$$\mathcal{E}_{N'}^{Maxwell}(t) \leq C_{N'}(1+t)^{2\delta''}\ \forall t \leq T\,. \tag{8.33}$$

En utilisant l'inégalité de Klainerman (11.36), on peut montrer que les estimations du corollaire 5.1 restent vraies avec $C_k\varepsilon$ remplacée par une constante C. On a par exemple :
(8.34)

$$|\partial Z^I A(t,x)| + |\partial Z^I h(t,x)| \leq \begin{cases} C(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta''}(1+|q|)^{-1-\delta''}, & q > 0\,, \\ C(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta''}(1+|q|)^{-1/2}, & q < 0\,, \end{cases} \quad |I| \leq N - \left[\frac{n+2}{2}\right]\,,$$

De plus, on peut montrer des estimations du type de celles de la proposition 7.1 avec $M_k\varepsilon$ remplacée par une constante C et $C_k\varepsilon$ remplacée par C'_k. Par exemple, on aura , pour $|I| = k \leq N/2+1$:
(8.35)

$$|\partial Z^I \begin{pmatrix} h \\ A \end{pmatrix}| + \frac{|Z^I \begin{pmatrix} h \\ A \end{pmatrix}|}{1+|q|} + \frac{1+t+|q|}{1+|q|}(|\bar{\partial} Z^I \begin{pmatrix} h \\ A \end{pmatrix}|) \leq \begin{cases} C'_k(1+t+|q|)^{-1+C}(1+|q|)^{-1-C}, & q>0\,, \\ C'_k(1+t+|q|)^{-1+C}(1+|q|)^{-1/2+\mu'}, & q<0\,. \end{cases}$$

Au rang $k+1 = N+1$, on a par hypothèse $\mathcal{E}^{Maxwell}_{k+1}(0) \leq \tilde{C}$

L'inégalité d'énergie (8.8) entraîne qu'il existe une constante C telle que :

$$\mathcal{E}^{Maxwell}_{k+1}(t) \leq \underbrace{\tilde{C} + \int_0^t \frac{C\mathcal{E}^{Maxwell}_{k+1}(\tau)}{1+\tau}\, d\tau + \int_0^t \frac{C}{(1+\tau)^{1-C}}\, d\tau}_{H(t)}\,, \tag{8.36}$$

Or,

$$\big(H(t)(1+t)^{-C}\big)' \leq \frac{C}{1+t}. \tag{8.37}$$

En intégrant, on obtient bien :

$$H(t)(1+t)^{-C} \leq H(0) + C\ln(1+t) \leq \tilde{C} + C'(1+t)^{C}\,. \tag{8.38}$$

Finalement :

$$\mathcal{E}^{Maxwell}_{k+1}(t) \leq H(t) \leq C'(1+t)^{2C}\,. \tag{8.39}$$

9 Complétude géodésique

Pour l'instant, on a prouvé l'existence d'une métrique g solution des équations d'Einstein-Maxwell, mais il est possible que l'espace-temps $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$ ainsi construit possède des singularités (en un certain sens défini dans [11]). Aussi, il est important de montrer la complétude géodésique de $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$.

Proposition 9.1. *Supposons que $h = g - m$ satisfait les estimations[3] suivantes :*

$$|h||\partial h| + |\partial h|_{\mathcal{T}\mathcal{U}} + |\bar{\partial} h|_{\underline{LL}} \leq C\varepsilon t^{-1}, \tag{9.1}$$

$$|\partial h(t,x)| \leq C\varepsilon t^{-1}, \quad pour \quad |x| \leq t/2 \tag{9.2}$$

Soit $X(\tau)$ une géodésique définie sur un intervalle de paramètres maximal. Alors les valeurs du paramètre affine τ parcourent $[0,\infty)$.

Remarque 9.2. *La démonstration de [15] ne couvre que le cas des géodésiques causales. Ici, on prouve aussi le résultat pour des géodésiques de type espace.*

On note :

$$X(\tau) = (x^0(\tau), x(\tau)) = (t(\tau), x(\tau)) = (t(\tau), r\omega(\tau))\,, \tag{9.3}$$

$$\begin{cases} \ddot{X}^\alpha(\tau) + \Gamma_{\beta\ \gamma}^{\ \alpha}(X(\tau))\dot{X}^\beta(\tau)\dot{X}^\gamma(\tau) = 0\,, \\ X(0) = Y \quad \dot{X}(0) = \zeta\,. \end{cases} \tag{9.4}$$

Prenant $\alpha = 0$ dans (9.4), on a :

$$\ddot{x}^0 + \frac{1}{2}(m^{0\sigma} + h^{0\sigma})(\partial_\beta h_{\gamma\sigma} + \partial_\gamma h_{\beta\sigma} - \partial_\sigma h_{\beta\gamma})\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0\,, \tag{9.5}$$

ce qui peut s'écrire :
(9.6)
$$\ddot{x}^0 - \frac{1}{2}(2\partial_\beta h_{0\gamma} - \partial_0 h_{\beta\gamma})\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = O(|h||\partial h||\dot{x}|^2) \underbrace{=}_{\text{d'après (9.1)}} O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2)\,.$$

Comme on a

$$\partial_\beta h_{0\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = \frac{d}{d\tau}(h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma) - h_{0\gamma}\ddot{x}^\gamma\,, \tag{9.7}$$

3. Ces estimations sont consistantes avec les estimations de décroissance prouvées pour h dans la proposition 7.1.

on est ramené à étudier :

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x}^0 - h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma) - \frac{1}{2}\partial_0 h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2) - h_{0\gamma}\ddot{x}^\gamma\,. \tag{9.8}$$

D'après (9.4) et (9.1), on a

$$|h_{0\gamma}\ddot{x}^\gamma| \leq |h||\Gamma||\dot{x}|^2 \leq \varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2\,. \tag{9.9}$$

Ceci nous amène à considérer l'équation suivante :

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x}^0 - h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma) - \frac{1}{2}\partial_0 h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{9.10}$$

Notons ici qu'en dimension $n+1 \geq 5$, on a, d'après la proposition 7.1 :

$$\frac{1}{2}\partial_0 h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{9.11}$$

Pour $n = 3$, on a seulement $|\partial h(t,x)| \leq C\varepsilon t^{-1}$ quand $|x| \leq t/2$. Comme $\partial_0 = \partial_s - \partial_q$, on a (d'après (9.1)) :

$$-\frac{1}{2}\partial_0 h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = \frac{1}{2}\partial_q h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma + O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{9.12}$$

Dans l'expression $\partial_q h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma$, seul le terme $\partial_q h_{\underline{L}\underline{L}}|\dot{x}^{\underline{L}}|^2$ n'a pas la décroissance souhaitée (i.e. $\partial_q h_{\underline{L}\underline{L}}|\dot{x}^{\underline{L}}|^2$ n'est pas $O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2)$).
On peut donc écrire

$$-\frac{1}{2}\partial_0 h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = \frac{1}{2}\partial_q h_{\underline{L}\underline{L}}|\dot{x}^{\underline{L}}|^2 + O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{9.13}$$

On utilise alors les écritures suivantes :

$$\dot{x}^{\underline{L}} = -\frac{1}{2}\dot{x}^\alpha L_\alpha = -\frac{1}{2}(-\dot{x}^0 + \frac{\dot{x}^i x_i}{|x|}) = -\frac{1}{2}(-\frac{d}{d\tau}(t-r)) = -\frac{\dot{q}}{2}\,, \tag{9.14}$$

et
(9.15)

$$\partial_q h_{00} = \partial_q h(\partial_t,\partial_t) = \partial_q h(\frac{L+\underline{L}}{2},\frac{L+\underline{L}}{2}) = \frac{1}{4}\partial_q h_{LL} + \frac{1}{2}\partial_q h_{L\underline{L}} + \frac{1}{4}\partial_q h_{\underline{L}\underline{L}} = \frac{1}{4}\partial_q h_{\underline{L}\underline{L}} + O(\varepsilon|x^0+1|^{-1})\,.$$

Soit ξ une fonction C^∞ telle que $\xi(\frac{x^0}{r}) = 1$ pour $\frac{x^0}{r} \leq 2$ et $\xi(\frac{x^0}{r}) = 0$ pour $\frac{x^0}{r} \geq 3$.
On a

$$\begin{aligned} \partial_q h_{00} =& (1-\xi)\partial_q h_{00} + \partial_q(\xi h_{00}) - \partial_q(\xi)h_{00} \\ =& \partial_q \xi h_{00} + O(\varepsilon|x^0+1|^{-1})\,. \end{aligned} \tag{9.16}$$

On a utilisé que $|\partial_q \xi(\frac{x^0}{r})| = |-\frac{1}{2}(r^{-1}+x^0 r^{-2})\xi'(\frac{x^0}{r})| \leq C|x^0|^{-1}$ puisque $r \geq \frac{x^0}{2}$ dans le support de ξ'. Ainsi :

$$-\frac{1}{2}\partial_q h_{\underline{LL}} |\dot{x}^{\underline{L}}|^2 = \dot{q}^2 (4\partial_q(\xi h_{00}) + O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}))\,. \tag{9.17}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(\xi h_{00}\dot{q}) &= \xi h_{00}\ddot{q} + \dot{q}\frac{d}{d\tau}(\xi h_{00}) \\ &= \xi h_{00}\ddot{q} + \dot{q}^2\partial_q(\xi h_{00}) + \dot{q}\dot{s}\partial_s(\xi h_{00}) + \dot{q}\dot{\omega}\partial_\omega(\xi h_{00}) \\ &= \xi h_{00}\ddot{q} + \dot{q}^2\partial_q(\xi h_{00}) + \partial_L(\xi h_{00})\dot{x}^L\dot{x}^{\underline{L}} + \partial_\omega(\xi h_{00})\dot{x}^\omega \dot{x}^{\underline{L}}\,.\end{aligned} \tag{9.18}$$

On a $\partial_\omega h_{00} = O(\varepsilon|x^0+1|^{-1})$, $\partial_L h_{00} = O(\varepsilon|x^0+1|^{-1})$, $\partial_\omega \xi(\frac{x_0}{r}) = 0$ et $\partial_L \xi(\frac{x_0}{r}) = O(|x^0+1|^{-1})$. Par conséquent

$$\dot{q}^2\partial_q(\xi h_{00}) = \frac{d}{d\tau}(\xi h_{00}\dot{q}) - \xi h_{00}\ddot{q} + O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}) \tag{9.19}$$

et

$$-\frac{1}{2}\partial_q h_{\underline{LL}}|\dot{x}^{\underline{L}}|^2 = \frac{d}{d\tau}(\xi h_{00}\dot{q}) - \xi h_{00}\ddot{q} + O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{9.20}$$

Pour l'instant, on a

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x}^0 - h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma + \xi h_{00}\dot{q}) - \xi h_{00}\ddot{q} = O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{9.21}$$

Or

$$\ddot{q} = \frac{d}{d\tau}(\dot{x}^0 - \frac{\dot{x}^i x_i}{|x|}) = \ddot{x}^0 - \frac{\ddot{x}^i x_i}{r} - r^{-1}(|\dot{x}|^2) - r^{-2}|x.\dot{x}|^2)\,. \tag{9.22}$$

En utilisant que $|\ddot{x}|^2 \leq |\Gamma||\dot{x}|^2$ (d'après (9.4)), que $r^{-1} \leq Ct^{-1}$ dans le support de ξ et en se servant de (9.1), on obtient

$$\xi h_{00}\ddot{q} = O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{9.23}$$

On peut ainsi se ramener à étudier

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x}^0 - h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma + \xi h_{00}\dot{q}) = O(\varepsilon|x^0+1|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{9.24}$$

Intégrons entre t_0 et t en utilisant que $|\dot{x}|^2 \leq |\dot{x}^0|^2 + C$:

(9.25)

$$|\dot{x}^0(t) - \dot{x}^0(t_0) - h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma(t) + h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma(t_0) + \xi h_{00}\dot{q}(t) - \xi h_{00}\dot{q}(t_0)| \leq \int_{t_0}^t \left(C\varepsilon|x^0(s)+1|^{-1}|\dot{x}^0(s)|^2 + C\varepsilon\right)\,ds\,.$$

Soit $V_0 = \dot{x}^0(t_0)$. On a :
(9.26)
$$|\dot{x}^0(t)| \leq C\left(|V_0|(1+\varepsilon)+\varepsilon+\varepsilon(t-t_0)\right)+\int_{t_0}^{t} C\varepsilon|x^0(s)+1|^{-1}|\dot{x}^0(s)|^2\,ds\,.$$

On utilise alors le lemme de Gronwall suivant : soient $y, z \in C^1([t_0,t_1])$ et $\psi \in C^0([t_0,t_1],\mathbb{R}^+)$ satisfaisant pour tout t dans $[t_0,t_1]$:

$$y(t) \leq z(t)+\int_{t_0}^{t}\psi(s)y(s)\,ds\,,$$

alors :

$$\forall t \in [t_0,t_1] \quad y(t) \leq z(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\psi(s)\,ds\right)+\int_{t_0}^{t}\frac{dz}{dt}(s)\exp\left(\int_{s}^{t}\psi(u)\,du\right)\,ds.$$

On obtient :

$$(9.27)\quad \begin{aligned}|\dot{x}^0(t)| \leq & C(|V_0|(1+\varepsilon)+\varepsilon)\exp\left(\int_{t_0}^{t}C\varepsilon|x^0(s)+1|^{-1}|\dot{x}^0(s)|\,ds\,,\right)\\ &+\int_{t_0}^{t}C\varepsilon\exp\left(\int_{s}^{t}C\varepsilon|x^0(u)+1|^{-1}|\dot{x}^0(u)|\,du\right)\,ds\,.\end{aligned}$$

Plusieurs cas sont alors possibles selon les signes de $x^0(t_0)$ et V_0 (et on peut se ramener à étudier des intervalles $[t_0,t]$ tels que x^0 et $\dot{x}^0$ ne changent pas de signe) :
Dans les cas ($V_0 \geq 0$ et $x^0(t_0) \geq 0$), ($V_0 \geq 0$ et $x^0(t_0) \leq 0$) ou ($V_0 \leq 0$ et $x^0(t_0) \geq 0$), on peut montrer que

$$(9.28)\quad \dot{x}^0(t) \leq C(x^0(t)+1)^{C\varepsilon}\left[(|V_0|(1+\varepsilon)+\varepsilon)(x^0(t_0)+1)^{-C\varepsilon}+\varepsilon(t-t_0)\right]\,.$$

Ceci peut s'écrire :
(9.29)
$$\frac{d}{dt}\left((x^0(t)+1)^{1-C\varepsilon}\right) \leq C\left[(|V_0|(1+\varepsilon)+\varepsilon)(x^0(t_0)+1)^{-C\varepsilon}+\varepsilon(t-t_0)\right]\,.$$

En intégrant, on trouve :

$$(9.30)\quad x^0(t)+1 \leq C\left[(|V_0|(1+\varepsilon)+\varepsilon)(x^0(t_0)+1)^{-C\varepsilon}(t-t_0)+\frac{\varepsilon}{2}(t-t_0)^2\right]\,.$$

Dans ces cas, x^0 reste borné en temps fini (et $\dot{x}^0$ aussi d'après (9.28)).
Dans le cas ($V_0 \leq 0$, $x^0(t_0) \leq 0$) alors $x^0(t) \leq x^0(t_0) \leq \varepsilon(t-t_0)$ et $\dot{x}^0(t) \leq \varepsilon(t-t_0)$.
Ainsi, x^0 et $\dot{x}^0$ restent bornés en temps fini. Or, si la géodésique $X(\tau)$ n'était définie que jusqu'à un certain temps fini τ^*, on aurait : $\lim\limits_{\tau\to\tau^*}(|X(\tau)|+|\dot{X}(\tau)|)=+\infty\,.$
Ceci entraîne la complétude géodésique de $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$.

10 Problème extérieur

10.1 Introduction

Le but de cette section est de montrer l'existence d'une solution globale, dans une certaine région $\mathcal{C}(R)$ définie en (10.1), pour les équations d'Einstein-Maxwell avec des données initiales bornées, non nécessairement petites. Le domaine dans lequel on parvient à montrer l'existence d'une telle solution contient des cônes lumières sortants complets en dimension d'espace $n \geq 4$. En dimension $n = 3$, la région obtenue ne contient pas des cônes lumières complets ; le problème vient du terme d'erreur dans l'équation (10.54), qui nécessite une puissance σ de r positive dans la définition du domaine $\mathcal{C}(R)$ pour obtenir le contrôle désiré.

Pour y parvenir, on s'appuie sur la méthode utilisée dans les sections précédentes qui permet de montrer l'existence globale de solutions lorsque les données initiales sont suffisamment petites. L'idée est d'utiliser un changement d'échelle pour que les quantités bornées deviennent petites. La principale difficulté de la preuve vient du fait que les équations de contraintes ne sont pas satisfaites à l'intérieur d'une certaine boule $B(1)$. C'est pourquoi on s'attachera à vérifier que les outils fondamentaux de [14] (inégalité de Klainerman, inégalité d'énergie, inégalité de Hardy et estimations de décroissance) restent valables dans la région extérieure du cône issu cette boule. Comme on peut le voir en reprenant le résumé de la méthode rédigé dans la section 1.1, le fait que ces résultats restent vrais en dehors de ce cône entraîne que le problème de Cauchy pour le système (10.3) possède une solution globale dans la région qui nous intéresse.

10.1.1 Notations

Dans tout ce qui suit, on notera :

$$\begin{aligned}
&\hat{\Omega} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \,;\, f(r) := r - b + ar^\sigma \geq t\} \,, \\
&B(R) = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| \geq R\}, \\
&\mathcal{C}(R) = \{(t,x) \in \hat{\Omega} \,; |x| \geq R\} \,,
\end{aligned} \tag{10.1}$$

avec $0 < \delta < \frac{1}{4}$ et [4]

(10.2)

$$\begin{cases} -1 < a < 0 \,, \quad b > 1 \quad \text{et } \delta < \sigma < 1 \,, \text{ pour } n = 3 \,, \\ 0 < a < 1 \text{ et } b > 1 \,, \quad \frac{3-n}{2} + \delta < \sigma < 0 \quad \text{et } a\sigma > -1 \text{ pour } n \geq 4 \,. \end{cases}$$

Notons que, pour $r \geq 1$, f est continue et strictement croissante. En effet,

4. Ces conditions viennent essentiellement de (10.54).

$f''(r) = a\sigma(\sigma-1)r^{\sigma-2} \geq 0$ et $f'(1) = 1 + a\sigma > 0$. Ainsi, f est bijective sur $[1, +\infty[$ et on notera, pour t fixé :

$$\hat{\Omega}_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \, ; r \geq 1 \text{ et } r \geq f^{-1}(t) \right\} ,$$

avec $f^{-1}(t) = t + b + O(t^\sigma)$.

10.1.2 Résultat principal

On s'intéresse au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} , \\ D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 . \end{array} \right. \tag{10.3}$$

On suppose les conditions initiales C^∞ et asymptotiquement euclidiennes : i.e. pour $r = |x| \to +\infty$, $\alpha > 0$ et M la masse ADM on a :
(10.4)

$$\forall \; i, j = 1, ..., n \qquad \left\{ \begin{array}{l} g_{0ij} = \begin{cases} (1 + \frac{2M}{r})\delta_{ij} + O(r^{-1-\alpha}) \text{ , pour } n = 3 \text{ ,} \\ \delta_{ij} + O(r^{\frac{1-n}{2}-\alpha}) \text{ , pour } n \geq 4 \text{ ,} \end{cases} \\ A^0 = O(r^{\frac{1-n}{2}-\alpha}) \text{ ,} \\ k_{0ij} = O(r^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}) \text{ ,} \\ E^0 = O(r^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}) \text{ .} \end{array} \right.$$

Remarque 10.1. *Comme la remarque 1.1 le signale, le fait que le terme de type Schwarzschild soit un $O(r^{\frac{1-n}{2}-\alpha})$ quand $n \geq 4$ entraîne une différence, selon les dimensions, dans la décomposition $h = h^1 + h^0$.*

Posons $g_0 = \delta + h_0^0 + h_0^1$ où $h_{0ij}^0 = \begin{cases} \chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{ij} & \text{pour } n = 3 \text{ ,} \\ 0 \quad \text{pour } n \geq 4 \text{ ,} \end{cases}$ avec $\chi \in C^\infty$ valant 1 pour $r \geq 3/4$ et 0 pour $r \leq 1/2$ et

(10.5)

$$E_{N,\gamma,R}(0) = \sum_{0 \leq |I| \leq N} \Big(||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|} \nabla \nabla^I h_0^1||^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(R))} + ||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|} \nabla^I k_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(R))}$$
$$+ ||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|} \nabla \nabla^I A^0||^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(R))} + ||(1+r)^{1/2+\gamma+|I|} \nabla^I E^0||^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(R))} \Big) \; .$$

Théorème 10.2 (Théorème d'existence globale sur $\mathcal{C}(R)$)**.** *Soient* $(\Sigma_0, g_0, k_0, A^0, E^0)$ *les données initiales du système d'équations d'Einstein-Maxwell* (10.3)*. Supposons que Σ_0 soit difféomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus B(R)$, avec R suffisamment grand, que* (g_0, k_0, A^0, E^0) *soient C^∞ et vérifient les conditions* (10.4) *et les équations de contraintes habituelles.*

Soit N un entier naturel tel que $N \geq 2[\frac{n+2}{2}]+6$. Alors, pour toutes données initiales vérifiant

$$\begin{aligned} &\sqrt{E_{N,\gamma,R}(0)} + M \leq C \quad si\ n = 3\,, \\ &\sqrt{E_{N,\gamma,R}(0)} \leq C \quad si\ n \geq 4\,, \end{aligned} \tag{10.6}$$

pour un certain $\gamma > 0$, le problème de Cauchy pour le système (10.3) *possède une solution C^∞ globale (g, A) sur $\mathcal{C}(R)$.*

Idée de la preuve : Comme on suppose que $E_{N,\gamma,R}(0) \leq C$, un changement d'échelle pour passer de $\mathbb{R}^n \backslash B(R)$ à $\mathbb{R}^n \backslash B(1)$ entraîne que $E_{N,\gamma,1}(0) \leq CR^{-\varepsilon}$. De plus, comme le montre l'équation (10.7), la masse diminue (M devient $\frac{M}{R}$). Ainsi, pour R suffisament grand, les données initiales ramenées à $\mathbb{R}^n \backslash B(1)$ seront assez petites pour appliquer le théorème d'existence globale 3.1. Par changement d'échelle inverse, l'existence d'une solution globale sur $\mathcal{C}(1)$ implique l'existence d'une solution globale sur $\mathcal{C}(R)$.

Soit $g_{ij}(y) = \delta_{ij}(y) + h_{ij}(y)$ avec $y \in \mathbb{R}^n \backslash B(R)$ et $h_{ij}(y) = \frac{2M}{|y|}\delta_{ij} + O(|y|^{-1-\alpha})$.
En posant $y = Rx$, on se ramène à $\mathbb{R}^n \backslash B(1)$.
Ainsi

$$x \in \mathbb{R}^n \backslash B(1) \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}^n \backslash B(R)\ .$$

On a alors :

$$h^R_{ij}(x) := h_{ij}(Rx) = \frac{2M}{R|x|} + O(\frac{1}{R^{1+\alpha}}\frac{1}{|x|^{1+\alpha}})\,. \tag{10.7}$$

On note ici que si R est assez grand, la quantité $\frac{M}{R}$ est suffisamment petite pour satisfaire les conditions exigées par les hypothèses du théorème 3.1. En ce qui concerne la courbure, on a :

$$k^R_{ij}(x) = \frac{1}{R}k_{ij}(y)\,. \tag{10.8}$$

La question qui se pose alors est : comment étendre h^R_{ij} et k^R_{ij} sur $\mathbb{R}^n \backslash B(1)$ pour que les résultats du théorème 3.1 s'appliquent ? Tout d'abord, on doit prendre en compte que les équations de contraintes habituelles ne sont pas vérifiées à l'intérieur de la boule $B(1)$. Ceci est l'objet du prochain paragraphe.

10.1.3 Equations de contraintes

On s'est ramené à l'exterieur d'une boule de rayon 1. Dans un premier temps, on pourrait penser qu'il suffit de remplir cette boule avec des données quelconques pour faire fonctionner l'argument établissant l'existence globale.

Mais cette approche naïve n'aboutit pas car si les équations de contraintes ne sont pas satisfaites à l'intérieur de la boule, on ne peut pas montrer que les conditions de jauge harmonique (1.4) et de Lorenz (1.5) sont satisfaites en tout temps.

C'est pourquoi il faut vérifier que les résultats fondamentaux de la démonstration restent vrais en dehors du cône issu de la boule de rayon 1. Les quatre paragraphes 10.3, 10.3, 10.4 et 10.5 sont consacrés à ce travail.

Avant tout, on va s'assurer qu'on peut construire des données initiales vérifiant la condition de jauge harmonique et de jauge de Lorenz en dehors de $B(1)$.

10.1.4 Harmonicité

On peut écrire la condition d'harmonicité sous la forme :

$$\partial_\mu(\sqrt{|\det g|}g^{\mu\nu}) = 0 \quad , \nu = 0...n \,. \tag{10.9}$$

Pour $|x| \geq 1$, on se donne $g_{\mu\nu}|_{t=0}$ (avec $g_{0i}|_{t=0} = 0$) , $\partial_\sigma g_{ij}|_{t=0}$, $G^\nu = -\partial_i(\sqrt{|\det g|}g^{\nu i})|_{t=0}$ et on veut trouver $\partial_0 g_{\mu\nu}|_{t=0}$ pour que la condition (10.9) soit vérifiée.
Dans ce but, on note que :

$$g^{\mu\nu}\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|}}\partial_\sigma(\sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|}) \,, \tag{10.10}$$

(10.9) entraîne que

$$\partial_0(\sqrt{|\det g|}g^{0\nu})|_{t=0} = G^\nu \,. \tag{10.11}$$

Si on pose

$$g^{0\nu} = -\delta_0^\nu \,, \tag{10.12}$$

on obtient :

$$-\delta_0^\nu \left(\partial_0(\sqrt{|\det g|})\right)|_{t=0} + \sqrt{|\det g|}\partial_0 g^{0\nu}|_{t=0} = G^\nu \,. \tag{10.13}$$

• Prenant $\nu = 0$ dans (10.13), on trouve :

$$-\partial_0(\sqrt{|\det g|})|_{t=0} + \sqrt{|\det g|}\partial_0 g^{00}|_{t=0} = 0 \,. \tag{10.14}$$

D'après (10.10) :

$$\begin{aligned}(10.15)\qquad \partial_0(\sqrt{|\det g|}) &= \frac{1}{2}\sqrt{|\det g|}g^{\alpha\beta}\partial_0 g_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\det g|}\left(-\partial_0 g_{00} + g^{ij}\partial_0 g_{ij}\right) \quad \text{d'après (10.12)}\,.\end{aligned}$$

Injectons ce résultat dans (10.14) :

$$(10.16)\qquad \frac{1}{2}\sqrt{|\det g|}\left(\partial_0 g_{00} - g^{ij}\partial_0 g_{ij} + 2\partial_0 g^{00}\right)|_{t=0} = 0\,.$$

Comme $\partial_0 g_{0\rho} = -g_{0\mu}g_{\alpha\rho}\partial_0 g^{\alpha\mu}$, on a $\partial_0 g_{00} = -\partial_0 g^{00}$ et, par conséquent :

$$(10.17)\qquad \partial_0 g_{00}|_{t=0} = -g^{ij}\partial_0 g_{ij}|_{t=0}\,.$$

• Prenant $\nu = j$ dans (10.13), on trouve :

$$(10.18)\qquad \sqrt{|\det g|}\partial_0 g^{0j}|_{t=0} = G^j\,.$$

Comme $\partial_0 g_{0j} = g_{jk}\partial_0 g^{k0}$, on conclut :

$$(10.19)\qquad \partial_0 g_{0j}|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} g_{jk}|_{t=0} G^k\,.$$

Ainsi, on peut construire des données initiales qui satisfont la condition de coordonnées harmoniques. D'une manière similaire, on peut construire des données initiales de telle façon qu'elles vérifient aussi la jauge de Lorenz.

Dans les quatre prochains paragraphes, on s'assure que les outils fondamentaux de [14] restent valables en dehors du cône $t = f(r)$.

10.2 Inégalité de Klainerman à l'extérieur du cône $t = f(r)$

On se propose de vérifier que l'inégalité de Klainerman reste vraie dans la région extérieure $\hat{\Omega}_t$ du cône (i.e. pour $r \geq f^{-1}(t)$ et $r \geq 1$).

Proposition 10.3 (Inégalité de Klainerman dans $\hat{\Omega}_t$)**.** *Il existe une constante C telle que*

$$(10.20)\quad (1+|t|+|x|)^{n-1}(1+||t|-|x||)|u(t,x)|^2 \leq C \sum_{|I|\leq[\frac{n+2}{2}]} ||Z^I u(t,.)||^2_{L^2(\hat{\Omega}_t)}$$

si u est dans $C^\infty(]t-1,t+1[\times\hat{\Omega}_t)$ et et tend vers 0 rapidement quand $|x| \to +\infty$.

Pour prouver ce résultat, on a besoin d'un autre résultat de [9] restreint à $\hat{\Omega}_t$, plus précisément la proposition 6.4.8 de [9] :

Proposition 10.4. *Si $u' \in L^p(\hat{\Omega}_t)$ et $p > n$, alors u est continue et*

$$|u(x) - u(y)| \leq C_{n,p}|x-y|^{1-\frac{n}{p}}||u'||_p \,. \tag{10.21}$$

Preuve de la proposition 10.4 *:* La preuve reprend celle proposée dans [9]. Le but est de s'assurer que l'argument reste vrai pour des fonctions qui ne sont définies que sur $\hat{\Omega}_t$. Par régularisation, on se restreint au cas où $u \in C^\infty(\hat{\Omega}_t)$ et, en utilisant un changement d'échelle, on peut aussi supposer que $|x-y| = 1$.

Dans un premier temps, on veut montrer que

$$|u * \varphi(x) - u(x)\int \varphi(y)\,dy| \leq C_{p,n}||\varphi||_\infty ||u'||_p \,, \tag{10.22}$$

si $p > n$ et φ s'annule en dehors de la boule unité. Il est suffisant de prouver ce résultat pour $x = 0$. En coordonnées polaires, on se ramène à estimer :

$$I = \int\int (u(r\omega) - u(0))\varphi(-r\omega)r^{n-1}\,dr\,d\omega \,. \tag{10.23}$$

Dans ce but, posons $\frac{\partial\Phi(r,\omega)}{\partial r} = r^{n-1}\varphi(-r\omega)$ et $\Phi(r,\omega) = 0$ quand $r > 1$. On a $|\Phi| \leq ||\varphi||_\infty$ et, par intégration par parties, on trouve :

$$I = -\int\int \frac{\partial u(r\omega)}{\partial r}\Phi(r,\omega)\,dr\,d\omega \,. \tag{10.24}$$

Comme

$$||u'||_p \geq \left(\int_0^1 \int \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p r^{n-1}\,dr\,d\omega\right)^{\frac{1}{p}} \,, \tag{10.25}$$

l'inégalité de Hölder donne :

$$\begin{aligned} |I| \leq & \int\int \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| |\Phi|\,dr\,d\omega \leq ||\varphi||_\infty \int\int \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| r^{\frac{n-1}{p}} r^{\frac{1-n}{p}}\,dr\,d\omega \\ \leq & ||\varphi||_\infty \left(\int_0^1 \int \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p r^{n-1}\,dr\,d\omega\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \int r^{\frac{(1-n)q}{p}}\,dr\,d\omega\right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq & ||\varphi||_\infty ||u'||_p \left(\int_0^1 \int r^{\frac{(1-n)q}{p}}\,dr\,d\omega\right)^{\frac{1}{q}} \,, \end{aligned} \tag{10.26}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Comme $1+\frac{(1-n)q}{p}=q\frac{p-n}{p}>0$ si $p>n$, l'intégrale à droite de l'inégalité converge et (10.22) est ainsi prouvée.

Enfin, puisque

$$|(u*\varphi)'| = |u'*\varphi| \leq ||\varphi||_q||u'||_p\,,$$

on a

$$|u*\varphi(x)-u*\varphi(y)| \leq |x-y|||\varphi||_q||u'||_p\,,$$

et (10.22) entraîne que, pour un certain φ d'intégrale 1 fixé, il existe une autre constante $C_{p,n}$ telle que

$$|u(x)-u(y)| \leq C_{p,n}||u'||_p\,, \quad \text{si } |x-y|=1\,. \tag{10.27}$$

Ceci termine la preuve de la proposition. Cette proposition entraîne un résultat analogue à celui du corollaire 6.4.9 de [9] mais restreint à la région $\hat{\Omega}_t$:

Corollaire 10.5. *Si m est un entier positif et $\frac{n}{m}<p\leq\infty$, $\partial^\alpha u\in L^p(\hat{\Omega}_t)$ pour $|\alpha|\leq m$ entraîne que u est une fonction continue et que*

$$\sup_{\hat{\Omega}_t}|u| \leq C_{n,p,m}\sum_{|\alpha|\leq m}||\partial^\alpha u||_{L^p(\hat{\Omega}_t)}\,. \tag{10.28}$$

On note que (10.28) appliqué à $\chi(x)u(\tilde{R}x)$ où $\chi\in C_0^\infty(x;|x|<1)$ et $\chi(0)=1$ donne une inégalité qui servira dans la preuve de l'inégalité de Klainerman :

(10.29)

$$\tilde{R}^{n/p}|u(0)| \leq C_{n,p,m}\sum_{|\alpha|\leq m}\tilde{R}^{|\alpha|}\left(\int_{f^{-1}(t)\leq|x|<\tilde{R}}|\partial^\alpha u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\,, \quad \text{si } n/m<p\leq\infty.$$

Preuve de la proposition 10.3 *:* On s'inspire de la preuve de la proposition 6.5.1 de [9], en étudiant uniquement la région $\hat{\Omega}$.

1^{er} **cas :** $\tilde{R}=t+|x|\leq 1$ **:** (notons que dans $\hat{\Omega}$, seules aux valeurs $t=0$ et $|x|=1$ sont concernées mais, la démonstration restant la même si on considère tout $\mathbb{R}^{n+1}$, on considère ce premier cas pour donner au lecteur une idée de la preuve de la proposition 11.5.)

On a

(10.30)

$$\begin{aligned}(1+|t|+|x|)^{n-1}(1+||t|-|x||)|u(t,x)|^2 &\leq 2^n|u(t,x)|^2\\ &\leq C\sum_{|\alpha|\leq[\frac{n+2}{2}]}||\partial_x^\alpha u||^2_{L^2(\hat{\Omega}_t)} \text{ d'après le corollaire 10.5}\\ &\leq C\sum_{|I|\leq[\frac{n+2}{2}]}||Z^I u||^2_{L^2(\hat{\Omega}_t)}\,.\end{aligned}$$

2^{nd} **cas :** $\tilde{R} = t + |x| > 1$ **:** Remarquons tout d'abord que dans $\hat{\Omega}_t$, on a $|x| \geq f^{-1}(t) > t+1$. Notons ensuite que les champs de vecteurs (12.2) et (12.3) de la famille $\mathcal{Z}$ définie dans la section 12.2 forment une base de tous les champs de vecteurs quand $t^2 \neq |x|^2$ puisque

$$(10.31) \qquad (\sum_{\alpha=0}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha^2)\partial/\partial x_\beta = \lambda_\beta x_\beta Z_0 - \sum_{\alpha=0}^{n} x_\alpha Z_{\beta\alpha} \ , \quad \beta = 0, ..., n \ ,$$

pour certains λ_μ non tous nuls. On peut ainsi écrire

$$(10.32) \qquad \partial_\beta = \sum_\nu a_{\beta\nu}(t,x) Z_\nu, \quad \beta = 0, ..., n \ ,$$

où Z_ν désigne un des champs de vecteurs de la famille $\mathcal{Z}$ définie dans la section 12.2 et $a_{\beta\nu}$ sont des fonctions C^∞ avec $|a_{\beta\nu}| \leq C|(t,x)|^{-1}$ en dehors du cône de lumière $\Lambda = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}, |t| = |x|\}$. Ici, $|(t,x)|^{-1} = |t^2 - r^2|^{-\frac{1}{2}}$. (On remarque que $|(t,x)|^{-1} \to +\infty$ sur Λ). Il s'en suit que, en dehors de Λ,

$$\partial^\alpha = \sum_{1 \leq |I| \leq \alpha} a_{\alpha I} Z^I \ ,$$

avec les fonctions $a_{\alpha I}$ lisses telles que $|a_{\alpha I}| \leq C|(t,x)|^{-|\alpha|}$.

Soit Γ un cône fermé qui n'a pas d'intersection avec Λ (sauf en 0). On choisit $\gamma > 0$ tel que

$$((t,x) \in \Gamma \cap \hat{\Omega}) \Rightarrow (t, x+y) \in \hat{\Omega}) \text{ si } \gamma f^{-1}(t) \leq |y| \leq \gamma \tilde{R} = \gamma(|t| + |x|).$$

En particulier, on aura $(t, x+y) \notin \Lambda$. Ainsi, on a

$$|a_{\alpha I}(t, x+y)| \leq C|(t, x+y)|^{-|\alpha|} \leq C\tilde{R}^{-|\alpha|}$$

si $(t,x) \in \Gamma$ et $\gamma f^{-1}(t) \leq |y| \leq \gamma \tilde{R}$. On obtient alors pour $(t,x) \in \Gamma$ et $\gamma f^{-1}(t) \leq |y| \leq \gamma \tilde{R}$:

(10.33)

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma f^{-1}(t) \leq |y| \leq \gamma \tilde{R}} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{n+2}{2}]} |\tilde{R}^{|\alpha|} \partial^\alpha u(t, x+y)|^2 \, dy &\leq \int_{\gamma f^{-1}(t) \leq |y| \leq \gamma \tilde{R}} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{n+2}{2}]} \left(\tilde{R}^\alpha \sum_{1 \leq |I| \leq \alpha} a_{\alpha I} Z^I u \right)^2 dy \\
&\leq \int_{\gamma f^{-1}(t) \leq |y| \leq \gamma \tilde{R}} C \sum_{|I| \leq [\frac{n+2}{2}]} |Z^I u|^2 \, dy \\
&\leq C \sum_{|I| \leq [\frac{n+2}{2}]} ||Z^I u(t,.)||^2_{L^2(\hat{\Omega}_t)}
\end{aligned}$$

En prenant $z = y/\gamma$ comme nouvelle variable, on obtient

(10.34)
$$\begin{aligned}\int_{f^{-1}(t)\le|z|\le\tilde{R}} \sum_{|\alpha|\le[\frac{n+2}{2}]} |\tilde{R}^{|\alpha|}\partial^\alpha u(t,x+z)|^2\,dz &\le \int_{f^{-1}(t)\le|z|\le\tilde{R}} C \sum_{|I|\le[\frac{n+2}{2}]} |Z^I u|^2\,dz \\ &\le C \sum_{|I|\le[\frac{n+2}{2}]} ||Z^I u(t,.)||^2_{L^2(\hat{\Omega}_t)}\,.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev (10.29) (avec $p = 2$ et $m = \left[\frac{n+2}{2}\right]$) , on trouve finalement :

(10.35)
$$\begin{aligned}\tilde{R}^{n/2}|u(t,x+0)| &\le C \sum_{|\alpha|\le\left[\frac{n+2}{2}\right]} \tilde{R}^{|\alpha|} \left(\int_{f^{-1}(t)\le|z|<\tilde{R}} |\partial^\alpha u(t,x+z)|^2\,dz\right)^{1/2} \\ &\le C \left(\sum_{|I|\le[\frac{n+2}{2}]} ||Z^I u(t,.)||^2_{L^2(\hat{\Omega}_t)}\right)^{1/2}\,.\end{aligned}$$

On déduit (10.20) de cette dernière inégalité.

On utilise ici une version à poids de cette proposition, avec le poids $w(q)$ défini par (11.28). On peut ainsi montrer, en s'inspirant de la preuve de la proposition 14.1 de [14] :

Proposition 10.6 (Inégalité de Klainerman à poids sur $\hat{\Omega}_t$)**.** *Soit $n \ge 3$, il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on ait*
(10.36)
$$(1+|t|+|x|)^{\frac{n-1}{2}}[(1+|q|)w(q)]^{\frac{1}{2}}|u(t,x)| \le C \sum_{|I|\le[\frac{n+2}{2}]} ||w(q)^{\frac{1}{2}} Z^I u(t,.)||_{L^2(\hat{\Omega}_t)}\,.$$

10.3 Energie à poids sur le cône $t = f(r)$

On s'intéresse à l'équation

(10.37) $$\tilde{\Box}_g u := g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta u = F\,.$$

Considérons l'ensemble $\hat{\Omega}_{t_1,t_2}$ où :

(10.38) $$\hat{\Omega}_{t_1,t_2} = \{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\,; t_1\le t\le t_2 \quad f(r)\ge t\}\,.$$

Les bords de cet ensemble sont :

(10.39) $$\Sigma_{t_1} = \{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\,; t = t_1\}\,.$$

(10.40)
$$\Sigma_{t_2} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,; t = t_2\} \ .$$

(10.41)
$$\hat{N}_{t_1,t_2} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,; t_1 \leq t \leq t_2 \quad t = f(r)\} \ .$$

On veut montrer qu'on a une inégalité d'énergie analogue à celle lemme 6.1 de [14] lorsqu'on se restreint à la région $\{f(r) \geq t\}$. La démonstration proposée ici semble plus naturelle que celle proposée dans [14]. Dans ce paragraphe, on obtient le résultat suivant :

Lemme 10.7 (Calcul d'énergie)**.** *Soit u une solution de* (10.37) *tendant suffisament vite vers* 0 *quand $|x| \to +\infty$. Supposons que la métrique g est telle que $H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$ satisfait $|H| \leq \frac{1}{2}$. Alors, avec $\omega = \frac{x}{|x|}$ et w défini en* (12.12)*, on a :*

(10.42)
$$\int_{\hat{\Omega}_{t_1,t_2}} |\bar{\partial} u|^2 w'(q)\, d^{n+1}x + 2\int_{\Sigma_{t_2}} \left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\right) w(q)\, d^n x \leq 4\int_{\Sigma_{t_1}} \left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\right) w(q)\, d^n x$$
$$+ 2\int_{\hat{\Omega}_{t_1,t_2}} \left(|(\partial_t H^{\alpha\beta})\partial_\alpha u \partial_\beta u| + 2|(\partial_\alpha H^{\alpha\beta})\partial_\beta u \partial_t u| + 2|F\partial_t u|\right) w(q)\, d^{n+1}x$$
$$+ 2\int_{\hat{\Omega}_{t_1,t_2}} \left(|H^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u + 2(\omega_i H^{i\alpha} - H^{0\alpha})\partial_t u \partial_\alpha u|\right) w'(q)\, d^{n+1}x \,.$$

Preuve : Soit $T_\mu{}^\nu = \nabla_\mu u \nabla^\nu u - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u \delta_\mu{}^\nu$. On a

(10.43)
$$\nabla_\nu (T_\mu{}^\nu) = \nabla_\mu u \Box_g u \,.$$

De plus, pour tout champ de vecteur X^μ, le théorème de Stokes nous donne :

(10.44)
$$\int_{\partial\hat{\Omega}} T_\mu{}^\nu X^\mu \, dS_\nu = \int_{\hat{\Omega}_{t_1,t_2}} \nabla_\nu (T_\mu{}^\nu X^\mu)\, d\mu \,.$$

où $d\mu = \sqrt{|\det g|}\, dx^{n+1}$ et $dS_\nu = \sqrt{|\det g|}\partial_\nu \lrcorner\, d^n x$.

On calcule alors que :

$$\nabla_\nu (T_\mu{}^\nu X^\mu) = X^\mu \left(\nabla_\mu u \Box_g u\right) + T_\mu{}^\nu \nabla_\nu (X^\mu) \,.$$

(10.45)
$$\begin{aligned} T_\mu{}^\nu \nabla_\nu (X^\mu) &= T_\mu{}^\nu \partial_\nu X^\mu + T_\mu^\nu \Gamma_\nu{}^\mu{}_\sigma X^\sigma \\ &= \underbrace{T_\mu{}^\nu \partial_\nu X^\mu}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2}\nabla_\mu u \nabla^\nu u g^{\mu\delta}\partial_\sigma g_{\delta\nu} X^\sigma}_{B} \\ &\quad + \underbrace{-\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\nu\delta}\partial_\alpha u \partial_\beta u \partial_\sigma g_{\delta\nu} X^\sigma}_{C} \ . \end{aligned}$$

On choisit $X^\mu = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\delta_0{}^\mu w(q)$ et on obtient (en coordonnées harmoniques) :

(10.46)

$$X^\mu\left(\nabla_\mu u \Box_g u\right) = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} w(q)\partial_t u \Box_g u = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} w(q)\partial_t u \tilde{\Box}_g u = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} w(q) F \partial_t u\,.$$

$$\begin{aligned}
A =& \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\partial_t u \nabla^\nu u \partial_\nu(w(q)) - \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u \partial_t(w(q)) \\
&+ \underbrace{w(q)\partial_t u \nabla^\nu u \partial_\nu\Big(\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\Big) - \frac{1}{2} w(q) g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u \partial_t\Big(\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\Big)}_{A_1} \\
=& \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\left(-g^{00}(\partial_t u)^2 + g^{ij}\omega_j \partial_t u \partial_i u + g^{0i}\omega_i(\partial_t u)^2 - g^{0i}\partial_t u \partial_i u + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u\right) w'(q) \\
&+ A_1\,. \\
B =& -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|\det g|}} w(q)(\partial_t g^{\alpha\beta})\partial_\alpha u \partial_\beta u\,.
\end{aligned}$$

On calcule alors (en coordonnées harmoniques) :

(10.47)

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{|\det g|}\left(w(q)\partial_t u \nabla^\nu u \partial_\nu\big(\sqrt{|\det g|}\big) - \frac{1}{2} w(q) g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u \partial_t\big(\sqrt{|\det g|}\big)\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{|\det g|}} w(q)\left(-(\partial_\alpha g^{\alpha\beta})\partial_\beta u \partial_t u - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\nu\delta}\partial_\alpha u \partial_\beta u \partial_\sigma g_{\delta\nu}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} w(q)\left((\partial_\alpha g^{\alpha\beta})\partial_\beta u \partial_t u\right) - C\,.
\end{aligned}$$

Ainsi $A_1 + C = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} w(q)\left((\partial_\alpha g^{\alpha\beta})\partial_\beta u \partial_t u\right)$ et on a :

(10.48)

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu(T_\mu{}^\nu X^\mu) &+ \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} w(q)\left(\frac{1}{2}(\partial_t g^{\alpha\beta})\partial_\alpha u \partial_\beta u - \partial_t u(\partial_\alpha g^{\alpha\beta})\partial_\beta u - F\partial_t u\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\left(-g^{00}(\partial_t u)^2 + g^{ij}\omega_j \partial_t u \partial_i u + g^{0i}\omega_i(\partial_t u)^2 - g^{0i}\partial_t u \partial_i u + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u\right) w'(q) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\left(-g^{00}(\partial_t u)^2 + g^{ij}\partial_i u \partial_j u + 2\omega_j g^{0j}(\partial_t u)^2 + 2\omega_i g^{ij}\partial_t u \partial_j u\right) w'(q) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\left(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u + 2(\omega_i g^{i\alpha} - g^{0\alpha})\partial_t u \partial_\alpha u\right) w'(q) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\left(|\bar\partial u|^2 + H^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u + 2(\omega_i H^{i\alpha} - H^{0\alpha})\partial_t u \partial_\alpha u\right) w'(q)\,.
\end{aligned}$$

Pour l'intégrale sur le bord $\partial\hat{\Omega}$, on a

(10.49)
$$T_\mu{}^\nu X^\mu = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} T_0{}^\nu w(q) = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \left(\partial_t u \nabla^\nu u - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta u \delta_0{}^\nu \right) w(q) \,.$$

Notant que $\partial\hat{\Omega}_{t_1,t_2} = \Sigma_{t_2} \bigcup \Sigma_{t_1} \bigcup \hat{N}_{t_1,t_2}$, on s'intéresse à :

(10.50)
$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_{t_2}} T_\mu{}^\nu X^\mu \, dS_\nu &= \int_{\Sigma_{t_2}} \left(g^{00} (\partial_t u)^2 + g^{0i} \partial_i u \partial_t u - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta u \right) w(q) \, d^n x \\
&= \int_{\Sigma_{t_2}} -\frac{1}{2} \left(-g^{00} (\partial_t u)^2 + g^{ij} \partial_i u \partial_j u \right) w(q) \, d^n x \,. \\
\int_{\Sigma_{t_1}} T_\mu{}^\nu X^\mu \, dS_\nu &= \int_{\Sigma_{t_1}} -\frac{1}{2} \left(-g^{00} (\partial_t u)^2 + g^{ij} \partial_i u \partial_j u \right) w(q) \, d^n x \,. \\
\int_{\hat{N}_{t_1,t_2}} T_\mu{}^\nu X^\mu \, dS_\nu &= \int_{\hat{N}_{t_1,t_2}} - \left(g^{\alpha\beta} \hat{L}_\alpha \partial_\beta u \partial_t u + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta u \right) w(q) \, d^n x \,,
\end{aligned}$$

où on a utilisé les notations $\hat{L}_0 = 1$ et $\hat{L}_i = \frac{x_i}{r} f' = \frac{x_i}{r} (1 + a\sigma r^{\sigma-1})$.
En réunissant tous ces résultats, (10.44) entraîne :

(10.51)
$$\begin{aligned}
&\int_{\hat{\Omega}_{t_1,t_2}} \frac{1}{2} |\bar{\partial} u|^2 w'(q) \, d^{n+1} x + \int_{\Sigma_{t_2}} \frac{1}{2} \left(-g^{00} (\partial_t u)^2 + g^{ij} \partial_i u \partial_j u \right) w(q) \, d^n x = \\
&\qquad \int_{\Sigma_{t_1}} \frac{1}{2} \left(-g^{00} (\partial_t u)^2 + g^{ij} \partial_i u \partial_j u \right) w(q) \, d^n x \\
&\qquad + \int_{\hat{N}_{t_1,t_2}} - \left(g^{\alpha\beta} \hat{L}_\alpha \partial_\beta u \partial_t u + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta u \right) w(q) \, d^n x \\
&\qquad + \int_{\hat{\Omega}_{t_1,t_2}} w(q) \left(\frac{1}{2} (\partial_t H^{\alpha\beta}) \partial_\alpha u \partial_\beta u - (\partial_\alpha H^{\alpha\beta}) \partial_\beta u \partial_t u - F \partial_t u \right) d^{n+1} x \\
&\qquad - \int_{\hat{\Omega}_{t_1,t_2}} \frac{1}{2} \left(H^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta u + 2(\omega_i H^{i\alpha} - H^{0\alpha}) \partial_t u \partial_\alpha u \right) w'(q) \, d^{n+1} x \,.
\end{aligned}$$

Or, on peut montrer que :

(10.52)
$$g^{\alpha\beta} \hat{L}_\alpha \partial_\beta u \partial_t u + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta u \geq 0 \quad si \quad g^{\alpha\beta} \hat{L}_\alpha \hat{L}_\beta \leq 0 \,.$$

On cherche donc des conditions sur a et σ entraînant que $g^{\alpha\beta} \hat{L}_\alpha \hat{L}_\beta \leq 0$.

(10.53)
$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta} \hat{L}_\alpha \hat{L}_\beta &= m^{\alpha\beta} \hat{L}_\alpha \hat{L}_\beta + O(H) \\
&= -1 + (f'(r))^2 + O(H) \\
&= 2a\sigma r^{\sigma-1} + a^2 \sigma^2 r^{2(\sigma-1)} + O(H) \,.
\end{aligned}$$

Sur $\hat{N}_{t_1,t_2}$, on a $q = r - t = b - ar^\sigma \geq 0$ et l'estimation du corollaire 5.1 ($|H| \leq C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta} \leq C\varepsilon(1+r)^{\frac{1-n}{2}+\delta}$) entraîne alors :

$$g^{\alpha\beta}\hat{L}_\alpha\hat{L}_\beta \leq C\left(a\sigma r^{\sigma-1} + a^2\sigma^2 r^{2(\sigma-1)} + \varepsilon(1+r)^{\frac{1-n}{2}+\delta}\right) . \tag{10.54}$$

En choisissant

$$\begin{cases} -1 < a < 0 & , \delta < \sigma \leq 1 \text{ , pour } n = 3 \text{ ,} \\ 0 < a < 1 & , \frac{3-n}{2} + \delta < \sigma < 0 \text{ , pour } n \geq 4 \text{ ,} \end{cases}$$

on obtient bien $g^{\alpha\beta}\hat{L}_\alpha\hat{L}_\beta \leq 0$ pour $r \geq 1$.

Si, de plus, on fait l'hypothèse que $|H^{\alpha\beta}| \equiv |g^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}| \leq 1/2$, on s'aperçoit que :

$$\frac{1}{2}\left(|\partial_t u|^2 + |\nabla_x u|^2\right) \leq -g^{00}|\partial_t u|^2 + g^{ij}\partial_i u \partial_j u \leq 2\left(|\partial_t u|^2 + |\nabla_x u|^2\right) . \tag{10.55}$$

On trouve finalement :

$$\begin{aligned} &\int_{\hat{\Omega}_{t_1,t_2}} |\bar{\partial} u|^2 w'(q)\, d^n x + 2\int_{\Sigma_{t_2}} \left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\right) w(q)\, d^{n-1}x \leq 4\int_{\Sigma_{t_1}} \left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\right) w(q)\, d^{n-1}x \\ &\qquad + 2\int_{\hat{\Omega}_{t_1,t_2}} \left(|(\partial_t H^{\alpha\beta})\partial_\alpha u \partial_\beta u| + 2|(\partial_\alpha H^{\alpha\beta})\partial_\beta u \partial_t u| + 2|F\partial_t u|\right) w(q)\, d^n x \\ &\qquad + 2\int_{\hat{\Omega}_{t_1,t_2}} \left(|H^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u + 2(\omega_i H^{i\alpha} - H^{0\alpha})\partial_t u \partial_\alpha u|\right) w'(q)\, d^n x \,. \end{aligned} \tag{10.56}$$

Ceci termine la preuve du lemme 10.7. Celui-ci entraîne la proposition 10.8 suivante (qui n'est autre que la proposition 6.2 de [14] restreinte à la région $\hat{\Omega}_t$).

Proposition 10.8. *Soit ϕ une solution de $\tilde{\Box}_g\phi = F$ avec une métrique g telle que, pour $H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$, on ait :*

$$\begin{aligned} &(1+|q|)^{-1}|H|_{\mathcal{L}\mathcal{L}} + |\partial H|_{\mathcal{L}\mathcal{L}} + |\bar{\partial} H| \leq C\varepsilon'(1+t)^{-1} \text{ ,} \\ &(1+|q|)^{-1}|H| + |\partial H| \leq C\varepsilon'(1+t+|q|)^{-\frac{1}{2}}(1+|q|)^{-\frac{1}{2}}(1+q_-)^{-\mu} \text{ .} \end{aligned} \tag{10.57}$$

Alors pour tout $0 < \gamma \leq 1$ et $0 < \varepsilon' \leq \gamma/2C$, on a

$$\int_{\Sigma_t} |\partial\phi|^2 w + \int_{\hat{\Omega}_{0,t}} |\bar{\partial}\phi|^2 w' \leq 8\int_{\Sigma_0} |\partial\phi|^2 w + 16\int_{\hat{\Omega}_{0,t}} \left(\frac{C\varepsilon'|\partial\phi|^2}{1+\tau} + |F||\partial\phi|\right) w \text{ .} \tag{10.58}$$

10.4 Estimation de décroissance dans $\hat{\Omega}_t$

La proposition qui suit s'appuie le corollaire 7.2 de [14] mais on ne s'intéresse ici qu'à la région $\hat{\Omega}_t$.

Pour $\gamma' \geq -1$, on définit cette fois le poids

$$\varpi = \varpi(q) = (1 + |q|)^{1+\gamma'} \tag{10.59}$$

Proposition 10.9. *Ici $n = 3$. Soit ϕ une solution de l'équation $\tilde{\Box}_g \phi = F$. Supposons que $H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$ satisfait*

$$|H| \leq \frac{\varepsilon'}{4}, \qquad \int_0^\infty \| H(t,\cdot)\|_{L^\infty(D_t)} \frac{dt}{1+t} \leq \frac{1}{4}, \qquad |H|_{\mathcal{LT}} \leq \frac{\varepsilon'}{4} \frac{|q|+1}{1+t+|x|} \tag{10.60}$$

dans la région $D_t = \{x \in \mathbb{R}^3;\ f^{-1}(t) \leq |x| \leq 2t\}$.
Alors, pour $\alpha = 1 + \gamma'$ et pour un point arbitraire $x \in D_t$, on a :

$$\begin{aligned}(1+t+|x|)|\varpi(q)\partial\phi(t,x)| \leq C\Bigg(&\sup_{0\leq\tau\leq t} \sum_{|I|\leq 1} \| \varpi(q) Z^I \phi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\hat{\Omega}_\tau)} \\ &+ \int_0^t \Big(\varepsilon'\alpha \|\varpi(q)|\partial\phi(t,\cdot)|\|_{L^\infty(D_\tau)} + (1+\tau)\|\varpi(q)|F(\tau,\cdot)|\|_{L^\infty(D_\tau)} \\ &+ \sum_{|I|\leq 2} (1+\tau)^{-1} \|\varpi(q) Z^I \phi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(D_\tau)}\Big)\, d\tau\Bigg).\end{aligned} \tag{10.61}$$

Idée de la preuve : Pour toute fonction ϕ, on a

$$(1+|t-r|)|\partial\phi| + (1+t+r)|\bar{\partial}\phi| \leq C \sum_{|I|=1} |Z^I \phi| . \tag{10.62}$$

Ainsi, (10.61) est vérifiée lorsque $r > 2t - 1$. De plus, comme

$$(1+r)|\partial_q \phi| \leq C|\partial_q(r\phi)| + C|\phi| , \quad r \geq 1/2 , \tag{10.63}$$

on a , pour $f^{-1}(t) \leq r \leq 2t - 1$ et $r \geq 1$:

$$(1+t+r)|\partial\phi| \leq C \sum_{|I|\leq 1} |Z^I \phi| + C|\partial_q(r\phi)| . \tag{10.64}$$

Il reste donc à montrer que $|\partial_q(r\phi)|$ est majoré par le terme de droite de (10.61) quand $f^{-1}(t) \leq r \leq 2t - 1$ et $r \geq 1$.

On utilise l'écriture suivante :

$$\Box\phi = \frac{1}{r}(\partial_r - \partial_t)(\partial_t + \partial_r)(r\phi) + \frac{1}{r^2}\triangle_h\phi := \frac{4}{r}\partial_s\partial_q(r\phi) + \triangle_\omega\phi \,. \tag{10.65}$$

Notons $\tilde{g}^{\alpha\beta} = \frac{g^{\alpha\beta}}{-2g^{L\underline{L}}}$ et $k^{\alpha\beta} = \tilde{g}^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$.
Si ϕ vérifie $\tilde{\Box}_g\phi = F$, on peut montrer que l'on a
(10.66)

$$|4\partial_s\partial_q r\phi + rk_{LL}\partial_q^2\phi + \bar{t}rk\partial_q\phi + (2g^{L\underline{L}})^{-1}rF| \leq C\left(r|\triangle_\omega\phi| + r|k|_{\mathcal{L}\mathcal{T}}|\bar{\partial}\partial\phi| + |k|(r|\bar{\partial}^2\phi| + |\bar{\partial}\phi|)\right) \,,$$

où $\bar{t}rk = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \delta^{ij} - \omega^i\omega^j$. Ceci entraîne que
(10.67)

$$|(4\partial_s - \frac{H_{LL}}{2g^{L\underline{L}}}\partial_q)\partial_q(r\phi)| \leq C\left[\left(1 + \frac{r|H|_{\mathcal{L}\mathcal{T}}}{1+|q|} + |H|\right) r^{-1}\sum_{|I|\leq 2}|Z^I\phi| + |H|r^{-1}|\partial_q(r\phi)| + r|F|\right] \,.$$

En multipliant par le poids $\varpi(q)$, en utilisant que

$$\varpi'(q) \leq C\alpha\varpi(q)/(1+|q|) \,,$$

et en servant des hypothèses de la proposition 10.9, on trouve :
(10.68)

$$|(4\partial_s - \frac{H_{LL}}{2g^{L\underline{L}}}\partial_q)\varpi(q)\partial_q(r\phi)| \leq C\left[\left(\frac{|H|}{1+t} + \alpha\frac{\varepsilon'}{1+t}\right)\varpi(q)|\partial_q(r\phi)| + \varepsilon'\sum_{|I|\leq 2}\frac{\varpi(q)|Z^I\phi|}{1+t} + (1+t)\varpi(q)|F|\right] \,.$$

Soit $(\tau, x(\tau))$ la courbe intégrale du champ de vecteur $\partial_s + H^{\underline{L}\underline{L}}(2g^{L\underline{L}})^{-1}\partial_q$ passant par un point (t,x) appartenant à la région $f^{-1}(t) \leq r \leq 2t-1$. En utilisant que $|H|_{LL} \leq C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}$ (d'après les estimations du corollaire 5.1), on voit que

(10.69)

$$\begin{aligned}\left(\partial_s - \frac{H_{LL}}{2g^{L\underline{L}}}\partial_q\right)(t-r+b-ar^\sigma) &= \left(\frac{1}{2}(\partial_r+\partial_t) - \frac{H_{LL}}{4g^{L\underline{L}}}(\partial_r-\partial_t)\right)(t-r+b-ar^\sigma) \\ &= -\frac{1}{2}a\sigma r^{\sigma-1} + \frac{H_{LL}}{4g^{L\underline{L}}}(2+a\sigma r^{\sigma-1}) \\ &\geq 0 \,,\end{aligned}$$

quand $\begin{cases} -1 < a < 0 & , \delta < \sigma \leq 1 \,, \text{ pour } n=3 \,, \\ 0 < a < 1 & , \frac{3-n}{2} + \delta < \sigma < 0 \,, \text{ pour } n \geq 4 \,, \end{cases}$ et $r \geq 1$.
Ainsi, cette courbe intégrale coupera obligatoirement le bord de la région $f^{-1}(t) \leq r \leq 2t-1$ en un point (t_0, x_0) tel que $|x_0| = 2t_0 - 1$.

Le long d'une telle courbe, la fonction $\psi := \varpi(q)\partial_q(r\phi)$ satisfait l'équation suivante :

$$|\frac{d}{dt}\psi| \leq \hat{h}|\psi| + f \ , \tag{10.70}$$

où
(10.71)

$$\hat{h} = C\frac{|H|}{1+t} \ , \quad f = C\left[\frac{\alpha\varepsilon'}{1+t}\varpi(q)|\partial_q(r\phi)| + \varepsilon'\sum_{|I|\leq 2}\frac{\varpi(q)|Z^I\phi|}{1+t} + (1+t)\varpi(q)|F|\right] \ .$$

On obtient le résultat (10.61) en utilisant le facteur intégrant $e^{-\int \hat{h}(s)ds}$ et en intégrant le long de la courbe intégrale à partir d'un point (t,x) de la région $f^{-1}(t) \leq r \leq 2t-1$ jusqu'au point d'intersection (t_0,x_0) défini plus haut.
En effet, on trouve en intégrant :
(10.72)

$$|\psi(t,x)| \leq \exp\left(\int_\tau^t ||\hat{h}(\sigma,.)||_{L^\infty}\, d\sigma\right)|\psi(t_0,x_0)| + \int_\tau^t \exp\left(\int_{\tau'}^t ||\hat{h}(\sigma,.)||_{L^\infty}\, d\sigma\right)||f(\tau',.)||_{L^\infty}\, d\tau'$$

avec la norme L^∞ prise sur la région $f^{-1}(t) \leq r \leq 2t-1$ et $r \geq 1$.
On remarque que lorsque $r_0 = |x_0| = 2t_0 - 1$, on a $r_0 \leq 2(1+|r_0-t_0|)$. Ceci entraîne :
(10.73)

$$|\psi(t_0,x_0)| \leq Cr\varpi(q)|\partial_q\phi| + C\varpi(q)|\phi| \leq C\varpi(q)(1+|r-t|)|\partial\phi| + C\varpi(q)|\phi|.$$

Ainsi, d'après (10.62), on a :

$$|\psi(t_0,x_0)| \leq C\sum_{|I|=1}\varpi(q)|Z^I\phi| \ . \tag{10.74}$$

Enfin, en utilisant que, d'après (10.60) : $\int_0^\infty ||\hat{h}(\sigma,.)||_{L^\infty}\, d\sigma \leq \frac{1}{4}$, on obtient l'inégalité souhaitée :

$$(10.75) \quad |\partial_q(r\phi)| \lesssim \sup_{0\leq\tau\leq t}\sum_{|I|\leq 1}\|\,\varpi(q)Z^I\phi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\hat{\Omega}_\tau)}$$

$$+\int_0^t\left(\varepsilon'\alpha\|\varpi(q)|\partial\phi(t,\cdot)|\|_{L^\infty(D_\tau)} + (1+\tau)\|\varpi(q)|F(\tau,\cdot)|\|_{L^\infty(D_\tau)} + \sum_{|I|\leq 2}(1+\tau)^{-1}\|\varpi(q)Z^I\phi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(D_\tau)}\right)d\tau.$$

10.5 Inégalité de Hardy dans $\hat{\Omega}_t$

L'inégalité de Hardy est utilisée à de nombreuses reprises dans la démonstration de l'existence globale ; elle permet en particulier de passer de la norme

L^2 à poids de $Z^I H$ à la norme L^2 à poids de ses dérivées $\partial Z^I H$. On vérifie ici qu'on peut l'obtenir en toute dimension $n \geq 3$, en se restreignant à la région $\hat{\Omega}_t$.

Lemme 10.10. *Soit $0 \leq \alpha \leq n-1$ et $\gamma > 0$. Alors pour toute fonction $\phi \in C^1_0([0,\infty[)$, il existe une constante C, dépendant d'une borne inférieure pour $\gamma > 0$, telle que :*

(10.76)
$$\int_{f^{-1}(t)}^{\infty} \frac{\phi^2}{(1+r-t)^{1-\gamma}} \frac{r^{n-1}\, dr}{(1+t+r)^{\alpha}} \leq C \int_{f^{-1}(t)}^{\infty} |\partial_r \phi|^2 \frac{(1+r-t)^{1+\gamma}}{(1+t+r)^{\alpha}} r^{n-1}\, dr\,.$$

Preuve : Soit $m(q) = (1+q)^{\gamma}$. On a $m'(q) = \gamma(1+q)^{-1+\gamma}$. De plus, comme $\alpha \leq n-1$, on calcule que :

(10.77)
$$\begin{aligned}\partial_r \left[r^{n-1}(1+t+r)^{-\alpha} m(r-t)\right] &= \left[\frac{n-1}{r} - \frac{\alpha}{1+t+r} + \frac{m'(r-t)}{m(r-t)}\right] \frac{r^{n-1} m(r-t)}{(1+t+r)^{\alpha}} \\ &\geq \frac{r^{n-1} m'(r-t)}{(1+t+r)^{\alpha}}\,.\end{aligned}$$

Ainsi,

(10.78)
$$\partial_r \left[r^{n-1}(1+t+r)^{-\alpha} m(r-t)\phi^2\right] \geq \frac{r^{n-1} m'(r-t)}{(1+t+r)^{\alpha}}\phi^2 + 2\phi\partial_r\phi \frac{r^{n-1} m(r-t)}{(1+t+r)^{\alpha}}\,.$$

En intégrant entre $f^{-1}(t)$ et $+\infty$ et en utilisant que ϕ est à support compact, on obtient :

$$\begin{aligned}0 &\geq -\left(f^{-1}(t)\right)^{n-1}\left(1+t+f^{-1}(t)\right)^{-\alpha} m\left(f^{-1}(t)-t\right)\phi^2\left(f^{-1}(t)\right) \\ &\geq \int_{f^{-1}(t)}^{\infty} \frac{r^{n-1} m'(r-t)\phi^2\, dr}{(1+t+r)^{\alpha}} + \int_{f^{-1}(t)}^{\infty} 2\phi\partial_r\phi \frac{r^{n-1} m(r-t)}{(1+t+r)^{\alpha}}\, dr\,,\end{aligned} \tag{10.79}$$

puis :

$$\int_{f^{-1}(t)}^{\infty} \frac{r^{n-1} m'(r-t)\phi^2\, dr}{(1+t+r)^{\alpha}} \leq 2\int_{f^{-1}(t)}^{\infty} |\phi||\partial_r\phi| \frac{m(r-t) r^{n-1}\, dr}{(1+t+r)^{\alpha}}\,. \tag{10.80}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$\int_{f^{-1}(t)}^{\infty} \frac{r^{n-1} m'(r-t)\, dr}{(1+t+r)^{\alpha}}\phi^2 \leq C \int_{f^{-1}(t)}^{\infty} |\partial_r\phi|^2 \frac{m(r-t)^2 r^{n-1}\, dr}{m'(r-t)(1+t+r)^{\alpha}}\,. \tag{10.81}$$

Ceci termine la preuve du lemme.

10.6 Conclusion

Comme on peut le voir en reprenant le résumé de la méthode de [14] de la section 1.1, le fait que ces résultats restent vrais en dehors du cône $\{t = f(r)\}$ entraîne que le problème de Cauchy pour système (10.3) possède une solution globale dans $\hat{\Omega}_t$.

11 Annexes

11.1 Remarque sur le tenseur $T_{\mu\nu}$

Dans cette thèse, on utilise le tenseur impulsion-énergie :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(\mathcal{F}_{\mu\lambda}\mathcal{F}_{\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\lambda\rho}\mathcal{F}_{\lambda\rho})\,, \tag{11.1}$$

où $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Les constantes qui apparaissent dans l'expression de $T_{\mu\nu}$ sont utilisées dans de nombreux ouvrages où la dimension d'espace est $n = 3$ (cf. [16] par exemple). Or, il n'est pas évident a priori de généraliser ces équations en dimensions supérieures. Le but des calculs de cette annexe 11.1 est de s'assurer que la généralisation directe utilisée ici est cohérente pour des dimensions $n \geq 3$.
Dans un premier temps, on va montrer que l'expression de $T_{\mu\nu}$ peut être vue comme résultant d'un principe variationnel. Ceci garantit, par des arguments standards, que les équations de Bianchi sont satisfaites ; on le verifiera aussi par un calcul explicite.

11.1.1 Principe variationnel

On considère le Lagrangien :

$$\mathscr{L} = \frac{\sqrt{|\det g|}}{16\pi}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-\det g}}{16\pi}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\,. \tag{11.2}$$

On définit alors le tenseur impulsion-énergie par

$$T^{\rho\sigma} = -\frac{2}{\sqrt{|\det g|}}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g_{\rho\sigma}}\,. \tag{11.3}$$

On a

(11.4)
$$T^{\rho\sigma} = -\frac{1}{8\pi\sqrt{|\det g|}}\left[\Big(\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial g_{\rho\sigma}}g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial g_{\rho\sigma}}\Big)\sqrt{|\det g|} + \frac{\partial(\sqrt{|\det g|})}{\partial g_{\rho\sigma}}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right]\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\,.$$

On utilise que $\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial g_{\rho\sigma}} = -g^{\mu\rho}g^{\alpha\sigma}$ et que $\frac{\partial(\sqrt{|\det g|})}{\partial g_{\rho\sigma}} = \frac{\sqrt{|\det g|}}{2}g^{\rho\sigma}$ et on obtient bien :

(11.5)
$$\begin{aligned} T^{\rho\sigma} &= -\frac{1}{8\pi}\Big(- g^{\alpha\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\beta}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\rho}g^{\beta\sigma}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\Big) \\ &= \frac{1}{4\pi}\Big(\mathcal{F}^{\rho\beta}\mathcal{F}^{\sigma}{}_{\beta} - \frac{1}{4}g^{\rho\sigma}\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\Big)\,. \end{aligned}$$

11.1.2 Identité de Bianchi

Le calcul qui suit montre que $D_\mu T^\mu_{\ \nu} = 0$ pour tout $\nu = 0, ..., n$. Tout d'abord, on a

$$
\begin{aligned}
T^\mu_{\ \nu} &= \frac{1}{4\pi}(\mathcal{F}^\mu_{\ \lambda}\mathcal{F}_\nu^{\ \lambda} - \frac{1}{4}\mathcal{F}^{\lambda\rho}\mathcal{F}_{\lambda\rho}\delta^\mu_\nu) \\
&= \frac{1}{4\pi}(\mathcal{F}^{\mu\alpha}\mathcal{F}_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\delta^\mu_\nu)\,.
\end{aligned} \tag{11.6}
$$

Par conséquent,

(11.7)

$$
\begin{aligned}
D_\mu T^\mu_{\ \nu} &= \frac{1}{4\pi}\Big(D_\mu(\mathcal{F}^{\mu\alpha}\mathcal{F}_{\nu\alpha}) - \frac{1}{4}D_\nu(\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta})\Big) \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(D_\beta(\mathcal{F}^{\beta\alpha}\mathcal{F}_{\nu\alpha}) - \frac{1}{4}D_\nu(\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta})\Big) \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(\mathcal{F}^{\beta\alpha}D_\beta\mathcal{F}_{\nu\alpha} - \frac{1}{2}\mathcal{F}^{\alpha\beta}D_\nu\mathcal{F}_{\alpha\beta}\Big) \quad \text{car } D_\beta\mathcal{F}^{\beta\alpha} = 0 \text{ d'après (1.1)} \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\beta\alpha}D_\beta\mathcal{F}_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{\alpha\beta}D_\alpha\mathcal{F}_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\mathcal{F}^{\alpha\beta}D_\nu\mathcal{F}_{\alpha\beta}\Big) \\
&= -\frac{\mathcal{F}^{\alpha\beta}}{8\pi}\Big(D_\beta\mathcal{F}_{\nu\alpha} \underbrace{-D_\alpha\mathcal{F}_{\nu\beta}}_{=D_\alpha\mathcal{F}_{\beta\nu}} + D_\nu\mathcal{F}_{\alpha\beta}\Big) \\
&= -\frac{\mathcal{F}^{\alpha\beta}}{8\pi}\Big(\partial_\beta\mathcal{F}_{\nu\alpha} + \partial_\alpha\mathcal{F}_{\beta\nu} + \partial_\nu\mathcal{F}_{\alpha\beta}\Big) \\
&= 0 \quad \text{car } \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,.
\end{aligned}
$$

11.2 Estimation de $|Z^I F_M|$

Un des travaux essentiels de cette thèse consiste à étudier les nouveaux termes introduits par les équations de Maxwell. Il est important de montrer qu'ils possèdent eux aussi les bonnes propriétés pour que les arguments de [14] puissent s'appliquer. La section 2 et surtout le lemme 6.2 qui en découle, suggèrent que ces nouveaux termes possèdent effectivement la structure adéquate. L'objet du lemme suivant est de montrer de façon explicite que c'est bien le cas et qu'on a une estimation de $|Z^I F_M|$ satisfaisante :

Lemme 11.1. *Pour F_M défini dans* (2.13) *et pour tout $|I| \leq N$, on a :*

(11.8)
$$|Z^I F_M| \leq C \sum_{|J|\leq|I|} \left(\frac{\varepsilon|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{1+t} + \frac{\varepsilon(1+|q|)^{\mu'-1/2}|\bar{\partial} Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{(1+t+|q|)^{1-C\varepsilon}} + \frac{\varepsilon^2|Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{(1+t+|q|)(1+|q|)} \right)$$
$$+ C \sum_{|J|\leq|I|-1} \frac{\varepsilon|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} + \frac{\varepsilon^2}{(1+t+|q|)^4} .$$

Preuve :
D'après (2.13), on a $|Z^I F_M| \leq |Z^I F| + |Z^I \tilde{F}| + |Z^I F^A|$. On va majorer chacun de ces trois derniers termes par le membre de droite de (11.8).

i) En suivant le raisonnement de la preuve du lemme 11.2 de [14] (en tenant compte de la dimension n), on montre que $|Z^I F|$ vérifie (11.8).

ii) D'après le lemme 6.2, on a
(11.9)
$$|Z^I \tilde{F}(h)(\partial A, \partial A)| \leq C \underbrace{\sum_{|J|+|K|\leq|I|} |\partial Z^J A||\partial Z^K A|}_{(1)} + C \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|+|J_3|\leq|I|} |Z^{J_3} h||\partial Z^{J_2} A||\partial Z^{J_1} A|}_{(2)} .$$

iii) D'après le lemme 6.2, on a

$$|Z^I F^A(h)(\partial h, \partial A)| \leq C \underbrace{\sum_{|J|+|K|\leq|I|} \left(|\bar{\partial} Z^J h||\partial Z^K A| + |\bar{\partial} Z^J A||\partial Z^K h|\right)}_{(3)} + C \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|+|J_3|\leq|I|} |Z^{J_3} h||\partial Z^{J_2} h||\partial Z^{J_1} A|}_{(4)} . \tag{11.10}$$

Reste à estimer (1), (2), (3) et (4) :

Notons tout d'abord que

$$\forall |J|, \quad |Z^J h^0| \leq C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1} \text{ et } |\partial Z^J h^0| \leq C\varepsilon(1+t+|q|)^{-2} . \tag{11.11}$$

On a :

$$(11.12)\quad (1) \leq |\partial A||\partial Z^I A| + \sum_{|J|\leq |I|-1, |K|\leq \frac{|I|-1}{2}} |\partial Z^J A||\partial Z^K A|$$
$$\leq \frac{C\varepsilon|\partial Z^I A|}{1+t} + \sum_{|J|\leq |I|-1} \frac{C\varepsilon|\partial Z^J A|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \quad \text{d'après (8.1) et (8.2)}.$$

De plus,

(11.13)

$$(2) \leq \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leq |I|} |h||\partial Z^{J_2} A||\partial Z^{J_1} A|}_{a} + \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leq |I|-1, 1\leq |J_3|\leq |I|-\left[\frac{n+2}{2}\right]} |Z^{J_3} h||\partial Z^{J_2} A||\partial Z^{J_1} A|}_{b}$$
$$\underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leq \left[\frac{n+2}{2}\right]-1, |I|-\left[\frac{n+2}{2}\right]+1\leq |J_3|\leq |I|} |Z^{J_3} h||\partial Z^{J_2} A||\partial Z^{J_1} A|}_{c}.$$

Or

(11.14)

$$a \leq C|\partial A||\partial Z^I A| + C \sum_{|J|\leq |I|-1, |K|\leq \frac{|I|-1}{2}} |\partial Z^J A||\partial Z^K A| \quad \text{car } |h| \leq C \text{ d'après le corollaire 5.1},$$
$$\leq \frac{C\varepsilon|\partial Z^I A|}{1+t} + \sum_{|J|\leq |I|-1} \frac{C\varepsilon|\partial Z^J A|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \quad \text{d'après (8.1) et (8.2)}.$$

(11.15)

$$b \leq C \sum_{|J_1|+|J_2|\leq |I|-1} |\partial Z^{J_2} A||\partial Z^{J_1} A|$$

car $|Z^{J_3} h| \leq C$ si $1 \leq |J_3| \leq N - \left[\frac{n+2}{2}\right]$ d'après le corollaire 5.1 ,

$$\leq \sum_{|J|\leq |I|-1} \frac{C\varepsilon|\partial Z^J A|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \quad \text{d'après (8.2)}.$$

(11.16)

$$c \leq C \sum_{|J_1|+|J_2|\leq \left[\frac{n+2}{2}\right]-1, |I|-\left[\frac{n+2}{2}\right]+1\leq |J_3|\leq |I|} |Z^{J_3} h^1||\partial Z^{J_2} A||\partial Z^{J_1} A| + C \sum_{|J_1|+|J_2|\leq \left[\frac{n+2}{2}\right]-1, |I|-\left[\frac{n+2}{2}\right]+1\leq |J_3|\leq |I|} |Z^{J_3} h^0||\partial Z^{J_2} A||\partial Z^{J_1} A|$$
$$\leq C \sum_{|J|\leq |I|} \left(\frac{\varepsilon|\partial Z^J A|}{1+t} + \frac{\varepsilon^2 |Z^J h^1|}{(1+t+|q|)(1+|q|)} \right)$$

d 'après le corollaire 5.1 et (11.11) (car $N \geq 2\left[\frac{n+2}{2}\right] - 1$) .

Ainsi
(11.17)
$$(2) \leq C \sum_{|J| \leq |I|} \left(\frac{\varepsilon |\partial Z^J A|}{1+t} + \frac{\varepsilon^2 |Z^J h^1|}{(1+t+|q|)(1+|q|)} \right) + \sum_{|J| \leq |I|-1} \frac{C\varepsilon |\partial Z^J A|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \, .$$

Dans ce qui suit, on utilisera souvent que $|\bar{\partial}\phi| \leq C|\partial\phi|$. Revenons aux majorations :

$$(3) \leq C \underbrace{\sum_{|J|+|K| \leq |I|} |\bar{\partial} Z^J h||\partial Z^K A|}_{d} + C \underbrace{\sum_{|J|+|K| \leq |I|} |\bar{\partial} Z^J A||\partial Z^K h|}_{e} \, , \tag{11.18}$$

et on a :

(11.19)

$$\begin{aligned}
d \leq & C|\partial A||\bar{\partial} Z^I h| + C|\partial Z^I A||\bar{\partial} h| + C \sum_{|J|+|K| \leq |I|-1} |\bar{\partial} Z^J h||\partial Z^K A| \\
\leq & C|\partial A||\bar{\partial} Z^I h^1| + C|\partial Z^I A||\bar{\partial} h^1| \\
& + C\varepsilon \sum_{|J| \leq |I|} |\partial Z^J A|(1+t)^{-1} + C \sum_{|J|+|K| \leq |I|-1} |\bar{\partial} Z^J h^1||\partial Z^K A| \quad \text{par (11.11)} \\
\leq & C \sum_{|J| \leq |I|} \frac{\varepsilon |\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{1+t} + C \sum_{|J|+|K| \leq |I|-1} |\bar{\partial} Z^J h^1||\partial Z^K A| \quad \text{par (8.1) et (8.2)} \\
\leq & C \sum_{|J| \leq |I|} \frac{\varepsilon |\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{1+t} + \sum_{|J|+|K| \leq |I|-1, |J| \leq \frac{|I|-1}{2}, |K| \geq \frac{|I|-1}{2}} C|\bar{\partial} Z^J h^1||\partial Z^K A| \\
& + \sum_{|J|+|K| \leq |I|-1, |J| \geq \frac{|I|-1}{2}, |K| \leq \frac{|I|-1}{2}} C|\bar{\partial} Z^J h^1||\partial Z^K A| + \sum_{|J|+|K| \leq |I|-1, |J| \leq \frac{|I|-1}{2}, |K| \leq \frac{|I|-1}{2}} C|\bar{\partial} Z^J h^1||\partial Z^K A| \\
\leq & C \sum_{|J| \leq |I|} \frac{\varepsilon |\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{1+t} + \frac{C\varepsilon}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \sum_{|J| \leq |I|-1} |\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}| \quad \text{par (8.2)} \, .
\end{aligned}$$

Un calcul similaire donne
(11.20)

$$
\begin{aligned}
e \leq & \sum_{|J|+|K|\leq|I|} C|\bar\partial Z^J A||\partial Z^K h^1| + \frac{C\varepsilon}{1+t}\sum_{|J|\leq|I|}|\partial Z^J A| \quad \text{par (11.11)}\\
\leq & C\sum_{|J|\leq|I|}\frac{\varepsilon|\partial Z^J\begin{pmatrix}h^1\\A\end{pmatrix}|}{1+t} + C\sum_{|J|\leq|I|}\frac{\varepsilon(1+|q|)^{\mu'-1/2}|\bar\partial Z^J A|}{(1+t+|q|)^{1-C\varepsilon}} \quad \text{par (8.2)}\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a

$$
\begin{aligned}
(3) \leq & C\sum_{|J|\leq|I|}\frac{\varepsilon|\partial Z^J\begin{pmatrix}h^1\\A\end{pmatrix}|}{1+t} + C\sum_{|J|\leq|I|}\frac{\varepsilon(1+|q|)^{\mu'-1/2}|\bar\partial Z^J A|}{(1+t+|q|)^{1-C\varepsilon}}\\
& + \frac{C\varepsilon}{(1+t)^{1-C\varepsilon}}\sum_{|J|\leq|I|-1}|\partial Z^J\begin{pmatrix}h^1\\A\end{pmatrix}|\,.
\end{aligned}
\tag{11.21}
$$

Enfin, on a
(11.22)

$$
\begin{aligned}
(4) \leq & \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leq|I|}|h||\partial Z^{J_2}h||\partial Z^{J_1}A|}_{a'} + \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leq|I|-1,1\leq|J_3|\leq|I|-\left[\frac{n+2}{2}\right]}|Z^{J_3}h||\partial Z^{J_2}h||\partial Z^{J_1}A|}_{b'}\\
& \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leq\left[\frac{n+2}{2}\right]-1,|I|-\left[\frac{n+2}{2}\right]+1\leq|J_3|\leq|I|}|Z^{J_3}h||\partial Z^{J_2}h||\partial Z^{J_1}A|}_{c'}\,.
\end{aligned}
$$

D'après le corollaire 5.1, $|h|$ et $|Z^{J_3}h|$ pour $|J_3| \leq |I| - \left[\frac{n+2}{2}\right]$ sont bornés donc :
(11.23)

$$
\begin{aligned}
a'+b' \leq & \sum_{|J_1|+|J_2|\leq|I|} C|\partial Z^{J_2}h^0||\partial Z^{J_1}A| + \sum_{|J_1|+|J_2|\leq|I|} C|\partial Z^{J_2}h^1||\partial Z^{J_1}A|\\
\leq & \sum_{|K|\leq|I|}\frac{C\varepsilon}{1+t}|\partial Z^{J_1}A| + \sum_{|J_1|+|J_2|\leq|I|} C|\partial Z^{J_2}h^1||\partial Z^{J_1}A| \quad \text{par (11.11)}\,.
\end{aligned}
$$

Et par un calcul analogue à celui de l'estimation du terme a (cf (11.14)), on trouve :

$$
a'+b' \leq \frac{C\varepsilon|\partial Z^I\begin{pmatrix}h^1\\A\end{pmatrix}|}{1+t} + \sum_{|J|\leq|I|-1}\frac{C\varepsilon|\partial Z^J\begin{pmatrix}h^1\\A\end{pmatrix}|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}}\,.
\tag{11.24}
$$

De même, par un calcul analogue à celui de l'estimation du terme c (cf (11.16)), on trouve :

$$c' \leq C \sum_{|J|\leq|I|} \left(\frac{\varepsilon|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{1+t} + \frac{\varepsilon^2 |Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{(1+t+|q|)(1+|q|)} \right) . \tag{11.25}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (4) \leq & C \sum_{|J|\leq|I|} \left(\frac{\varepsilon|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{1+t} + \frac{\varepsilon^2 |Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{(1+t+|q|)(1+|q|)} \right) \\ & + \sum_{|J|\leq|I|-1} \frac{C\varepsilon|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} . \end{aligned} \tag{11.26}$$

Finalement, (11.12), (11.17), (11.21) et (11.26) montrent que (11.8) est vraie.

On peut aussi noter que d'après (11.10) et (11.9), et en utilisant le corollaire 5.1, on a pour tout $|I| \leq N/2+2$:

$$|Z^I F_M| \leq C\varepsilon \sum_{|K|\leq|I|} \frac{|\partial Z^K h| + |\partial Z^K A|}{1+t+|q|} + C \sum_{|J|+|K|\leq|I|, |J|\leq|K|<|I|} (|\partial Z^J h| + |\partial Z^J A|)(|\partial Z^K h| + |\partial Z^K A|) . \tag{11.27}$$

11.3 Quelques résultats importants

Dans ce paragraphe, on rédige quelques résultats de [14] généralisés lorsque c'est nécessaire pour $n \geq 3$. Ces résultats sont la base même de la méthode utilisée pour montrer l'existence globale. C'est pourquoi il semblait utile, pour faciliter la compréhension du lecteur, de les reprendre ici.

On considère le poids suivant :

$$w = w(q) = \begin{cases} (1+|q|)^{1+2\gamma}, & \text{quand} \quad q > 0 , \\ (1+|q|)^{-2\mu}, & \text{quand} \quad q < 0 . \end{cases} \tag{11.28}$$

avec $\mu > 0$ et $0 < \gamma < 1$. Notons $q_- = |q|$ si $q \leq 0$ et $q_- = 0$ si $q \geq 0$.

11.3.1 Inégalité d'énergie

La proposition 6.2 de [14] peut être généralisée pour des dimensions d'espace $n \geq 3$:

Proposition 11.2. *Soit ϕ une solution de $\tilde{\Box}_g \phi = F$ avec une métrique g telle que, pour $H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$, on ait :*

$$(1+|q|)^{-1}|H|_{\mathcal{L}\mathcal{L}} + |\partial H|_{\mathcal{L}\mathcal{L}} + |\bar{\partial} H| \le C\varepsilon'(1+t)^{-1}\,, \tag{11.29}$$
$$(1+|q|)^{-1}|H| + |\partial H| \le C\varepsilon'(1+t+|q|)^{-\frac12}(1+|q|)^{-\frac12}(1+q_-)^{-\mu}\,.$$

Alors pour tout $0 < \gamma \le 1$ et $0 < \varepsilon' \le \gamma/2C$, on a

$$\int_{\Sigma_t} |\partial\phi|^2 w + \int_0^t \int_{\Sigma_t} |\bar{\partial}\phi|^2 w' \le 8\int_{\Sigma_0} |\partial\phi|^2 w + 16\int_0^t \int_{\Sigma_t} \left(\frac{C\varepsilon'|\partial\phi|^2}{1+\tau} + |F||\partial\phi|\right) w\,. \tag{11.30}$$

Preuve : on pourra bien sûr consulter [14] mais aussi la démonstration du lemme 10.7 (et la proposition 10.8 qui en découle) pour avoir un bon aperçu du calcul et une approche différente de [14].

11.3.2 Estimation de décroissance

La proposition qui suit n'est autre le corollaire 7.2 de [14], elle n'est utilisée qu'en dimension $n = 3$ pour améliorer les estimations obtenues dans le corollaire 5.1 . Elle ne nécessite donc aucune généralisation mais est rédigée ici pour rendre la lecture plus aisée.

Pour $\gamma' \ge -1$, $\mu' \le 1/2$, on définit cette fois le poids

$$\varpi = \varpi(q) = \begin{cases} (1+|q|)^{1+\gamma'}, & \text{quand} \quad q > 0\,, \\ (1+|q|)^{1/2-\mu'} & \text{quand} \quad q < 0\,. \end{cases} \tag{11.31}$$

Proposition 11.3. *Ici $n = 3$. Soit $\phi_{\mu\nu}$ une solution de l'équation $\tilde{\Box}_g \phi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Supposons que $H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$ satisfait*

$$|H| \le \frac{\varepsilon'}{4}, \qquad \int_0^\infty \| H(t,\cdot)\|_{L^\infty(D_t)} \frac{dt}{1+t} \le \frac14, \qquad |H|_{\mathcal{L}\mathcal{T}} \le \frac{\varepsilon'}{4}\frac{|q|+1}{1+t+|x|} \tag{11.32}$$

dans la région $D_t = \{x \in \mathbf{R}^3;\ t/2 \le |x| \le 2t\}$.
Alors, pour $\alpha = \max(1+\gamma', 1/2-\mu')$, pour tout $U, V \in \{L, \underline{L}, S_1, S_2\}$ et un point arbitraire $x \in D_t$, on a :

$$\begin{aligned}(1+t+|x|)|\varpi(q)\partial\phi(t,x)|_{UV} \le C\Bigg(&\sup_{0\le\tau\le t} \sum_{|I|\le 1} \| \varpi(q) Z^I \phi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty} \\ &+ \int_0^t \Big(\varepsilon'\alpha\|\varpi(q)|\partial\phi(t,\cdot)|_{UV}\|_{L^\infty} + (1+\tau)\|\varpi(q)|F(\tau,\cdot)|_{UV}\|_{L^\infty(D_\tau)} \\ &+ \sum_{|I|\le 2}(1+\tau)^{-1}\|\varpi(q) Z^I\phi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(D_\tau)}\Big)\, d\tau\Bigg)\,.\end{aligned} \tag{11.33}$$

Preuve : On pourra consulter [14] pour la démonstration complète mais aussi la preuve de la proposition 10.9 utilisée ici pour le problème extérieur de la section 10.

11.3.3 Inégalité de Hardy

En adaptant la démonstration de l'inégalité de Hardy, faite en dimension 3 dans [14], on obtient l'inégalité de Hardy suivante. Celle-ci intervient à de nombreuses reprises pour passer de la norme L^2 d'une fonction à la norme L^2 de son gradient.

Proposition 11.4 (Inégalité de Hardy). *Soit $n \geq 3$ et soit w défini par (11.28) . Alors, pour tout $2-n \leq a \leq 1$ et tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{(1+|q|)^2} \frac{w\,dx}{(1+t+|q|)^{1-a}} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\partial u|^2 \frac{w\,dx}{(1+t+|q|)^{1-a}} . \tag{11.34}$$

Si de plus $a < 2\min(\gamma, \mu)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{(1+|q|)^2} \frac{(1+|q|)^{-a}}{(1+t+|q|)^{1-a}} \frac{w\,dx}{(1+q_-)^{2\mu}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\partial u|^2 w'\,dx . \tag{11.35}$$

Preuve : Pour se faire une idée de la preuve, on pourra regarder [14] ou se diriger vers la démonstration du lemme 10.10 servant dans le problème extérieur de la section 10.

11.3.4 Inégalités de Klainerman

La proposition suivante (Proposition 6.5.1 de [9]) joue un rôle fondamental dans la démonstration de l'existence globale , c'est pourquoi on la reprend ci-dessous :

Proposition 11.5 (Inégalité de Klainerman). *Il existe une constante C telle que*

$$(1+|t|+|x|)^{n-1}(1+||t|-|x||)|u(t,x)|^2 \leq C \sum_{|I| \leq [\frac{n+2}{2}]} ||Z^I u(t,.)||^2_{L^2} \tag{11.36}$$

si u est dans $C^\infty(]t-1,t+1[\times\mathbb{R}^n)$ et tend vers 0 rapidement quand $|x| \to +\infty$.

Idée de la preuve : On pourra se référer à [9] ou à la démonstration de la proposition 10.3 utilisée pour le problème extérieur.

Dans cette thèse, on utilise une version à poids de cette proposition, avec le poids $w(q)$ défini par (11.28). En s'inspirant la démonstration de la proposition 14.1 de [14] , faite en dimension $n = 3$, on obtient :

Proposition 11.6 (Inégalité de Klainerman à poids)**.** *Soit $n \geq 3$, il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on ait*
(11.37)

$$(1+|t|+|x|)^{\frac{n-1}{2}}[(1+|q|)w(q)]^{\frac{1}{2}}|u(t,x)| \leq C \sum_{|I|\leq[\frac{n+2}{2}]} ||w(q)^{\frac{1}{2}} Z^I u(t,.)||_{L^2}\,.$$

12 Notations

12.1 Notations basiques

• Les indices grecs $\alpha, \beta, \mu, \nu...$ et les indices latins $i, j, ...$ parcourent respectivement $0, ..., n$ et $1, ..., n$.

• On utilise, à de nombreuses reprises, la convention de sommation sur les indices répétés dans des positions différentes. Par exemple : $X_\mu Y^\mu = \sum_{\mu=0}^{n} X_\mu Y^\mu$.

• On note $\{x^\mu\}_{\mu=0,...,n} = (t, x) = (-x_0, x_1, ..., x_n)$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ et $\omega = \frac{x}{|x|}$.

• Le symbole D dénote la dérivation covariante de Levy-Civita par rapport à la métrique g. On note $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ et $\partial = (\partial_t, \partial_1, ..., \partial_n)$.

• $\delta_{\mu\nu}$ désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{\mu\nu} = \delta_\mu^\nu = \delta^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mu = \nu\,, \\ 0 \text{ si } \mu \neq \nu\,. \end{cases}$

• $m = -dt^2 + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2$ est la métrique de Minkowski sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

• On note $\tilde{\Box}_g = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ et $\tilde{\Box}_m = \Box = -\partial_t^2 + \partial_1^2 ... + \partial_n^2$.

• Pour les symboles de Christoffel, on note :

$$\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\delta}(\partial_\mu g_{\delta\nu} + \partial_\nu g_{\delta\mu} - \partial_\delta g_{\mu\nu})\,.$$

12.2 La famille $\mathcal{Z}$

• La famille de champs de vecteurs $\mathcal{Z}$ est composée des champs de vecteurs suivants :

$$\partial_\alpha, \quad \alpha = 0, ..., n\,, \tag{12.1}$$

$$Z_{\alpha\beta} = x_\beta \partial_\alpha - x_\alpha \partial_\beta\,, \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq n\,, \tag{12.2}$$

$$Z_0 = \sum_{\alpha=0}^{n} x^\alpha \partial_\alpha\,. \tag{12.3}$$

On notera Z^I tout produit de $|I|$ champs de vecteurs de $\mathcal{Z}$.

• Notant $[X,Y]=XY-YX$, on a $[\Box,\partial_\alpha]=[\Box,Z_{\alpha\beta}]=0$ et $[\Box,Z_0]=2\Box$. Soit $Z\in\mathcal{Z}$, on définit c_Z par $[\Box,Z]=c_Z\Box$ et on note $\hat{Z}=Z+c_Z$.

12.3 La famille $\mathcal{U}$

• En tout point (t,x), on définit deux vecteurs L et $\underline{L}$ isotropes pour la métrique m :

$L=\partial_t+\partial_r$ dénote le champ de vecteur tangent au cône de lumière futur de Minkowski $t-r$ =constante. (On a $L^0=1$, $L^i=\frac{x^i}{|x|}$, $i=1,...,n$.)
On utilise les notations :

$$\partial_s=\frac{1}{2}L^\mu\partial_\mu=\frac{1}{2}\partial_L=\frac{1}{2}(\partial_t+\partial_r)\,,\qquad \text{avec } s=t+r\,.$$

$\underline{L}=\partial_t-\partial_r$ dénote le champ de vecteur transverse au cône de lumière $t-r$ =constante. (On a $\underline{L}^0=1$, $\underline{L}^i=-\frac{x^i}{|x|}$, $i=1,...,n$.)
On utilise les notations :

$$\partial_q=-\frac{1}{2}\underline{L}^\mu\partial_\mu=-\frac{1}{2}\partial_{\underline{L}}=\frac{1}{2}(\partial_r-\partial_t)\,,\qquad \text{avec } q=r-t\,.$$

• On définit alors la famille $\mathcal{U}=\{L,\underline{L},S_1,S_2,...,S_{n-1}\}$, où $S_1,S_2,...,S_{n-1}$ dénotent des champs de vecteurs orthogonaux deux à deux, de norme 1, engendrant l'espace tangent aux sphères t = constante, r = constante.
On utilise les notations $\partial_{S^i}=S^{i\mu}\partial_\mu$ pour $1\le i\le n-1$.

• Dérivées :

– On note $\partial=(\partial_t,\,\partial_1,\,\partial_2,\,...,\,\partial_n)$ les dérivées d'espace et de temps.

– Les dérivées tangentes aux cônes $t-r=cste$ sont symbolisées par $\bar\partial=(\bar\partial_0,\,\bar\partial_1,\,...,\bar\partial_n)$ avec $\bar\partial_0=L^\mu\partial_\mu=\partial_t+\partial_r$ et $\bar\partial_i=\partial_i-\omega_i\partial_r$ pour $i=1,...,n$.

• Décomposition par rapport à la famille $\mathcal{U}$:

– Pour tout champ de vecteurs X et tout $U\in\mathcal{U}$, on a $X_U=X_\alpha U^\alpha$, où $X_\alpha=m_{\alpha\beta}X^\beta$.

– Tout champ de vecteurs X peut s'écrire

$$X = X^\alpha \partial_\alpha = X^L L + X^{\underline{L}} \underline{L} + \sum_{i=1}^{n} X^{S_i} S_i \,,$$

où $X^L = -X_{\underline{L}}/2$, $X^{\underline{L}} = -X_L/2$, $X^{S_i} = X_{S_i}$.

– Pour tout couple de champs de vecteurs (X, Y), on a :

$$X^\alpha Y_\alpha = -X_L Y_{\underline{L}}/2 - X_{\underline{L}} Y_L/2 + \sum_{i=1}^{n} X_{S_i} Y_{S_i} \,.$$

• Soient $(U_1, U_2) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ et k un 2-tenseur, on note $k_{U_1 U_2} = k(U_1, U_2) = k_{\alpha\beta} U_1^\alpha U_2^\beta$.
En particulier, on a, pour tout $i, j = 1, ..., n-1$:

$$\begin{aligned} m_{LL} = m_{\underline{L}\,\underline{L}} = m_{LS_i} = m_{\underline{L}\,S_i} &= 0 \,, \\ m_{L\underline{L}} = m_{\underline{L}L} &= -2 \,, \\ m_{S_i S_j} &= \delta_{ij} \,. \end{aligned}$$

• On définit les familles $\mathcal{T} = \{L, S_1, S_2, ..., S_{n-1}\}$, $\mathcal{L} = \{L\}$ et $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, ..., S_{n-1}\}$.

• Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux des familles $\mathcal{U}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{S}$, p un 1-tenseur et k un 2-tenseur, on définit :

$$|p|_{\mathcal{V}} = \sum_{V \in \mathcal{V}} |p_\alpha V^\alpha| \,, \tag{12.4}$$

$$|\partial p|_{\mathcal{V}} = \sum_{U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}} |\partial_\mu p_\alpha U^\mu V^\alpha| \,, \tag{12.5}$$

$$|\bar{\partial} p|_{\mathcal{V}} = \sum_{T \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{V}} |\partial_\mu p_\alpha T^\mu V^\alpha| \,, \tag{12.6}$$

$$|k|_{\mathcal{V}\mathcal{W}} = \sum_{V \in \mathcal{V}, W \in \mathcal{W}} |k_{\alpha\beta} V^\alpha W^\beta| \,, \tag{12.7}$$

$$|\partial k|_{\mathcal{V}\mathcal{W}} = \sum_{U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}, W \in \mathcal{W}} |\partial_\mu k_{\alpha\beta} U^\mu V^\alpha W^\beta| \,, \tag{12.8}$$

$$|\bar{\partial} k|_{\mathcal{V}\mathcal{W}} = \sum_{T \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{V}, W \in \mathcal{W}} |\partial_\mu k_{\alpha\beta} T^\mu V^\alpha W^\beta| \,. \tag{12.9}$$

12.4 Energies à poids

- On définit :

$$\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) = \sup_{0\le\tau\le t} \sum_{Z\in\mathcal{Z},|I|\le N} \int_{\Sigma_\tau} \left(|\partial Z^I h^1|^2 + |\partial Z^I A|^2\right) w(q)\, d^n x \ , \tag{12.10}$$

$$\mathcal{S}_N^{Maxwell}(t) = \sum_{Z\in\mathcal{Z},|I|\le N} \int_0^t \int_{\Sigma_\tau} \left(|\bar\partial Z^I h^1|^2 + |\bar\partial Z^I A|^2\right) w'(q)\, d^n x\, d\tau \ , \tag{12.11}$$

où

$$w(q) = \begin{cases} 1+(1+|q|)^{1+2\gamma}, & q>0 \ , \\ 1+(1+|q|)^{-2\mu}, & q<0 \ , \end{cases} \tag{12.12}$$

avec $q = r - t$, $\mu > 0$ et $0 < \delta < \gamma < \alpha$, et

$$h^1_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - h^0_{\mu\nu} \ , \tag{12.13}$$

où $h^0_{\mu\nu}(t) = \begin{cases} \chi(r/t)\chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{\mu\nu} & \text{pour } n=3 \ , \\ 0 \quad \text{pour } n \ge 4 \ , \end{cases}$
$\chi \in C^\infty$, $\chi(s)$ valant 1 quand $s \ge 3/4$ et 0 quand $s \le 1/2$.

- Enfin, on reprend ici quelques conditions utilisées dans cette thèse :

$$\begin{aligned} &0 < \delta < \frac{1}{4}\,, \\ &0 < \gamma < 1\,, \\ &0 < \gamma' < \gamma - \delta\,, \\ &0 < \delta < \mu' < \frac{1}{2}\,, \\ &0 < \mu < \frac{1}{2} - \mu'\,. \end{aligned} \tag{12.14}$$

Références

[1] Robert Bartnik and Jim Isenberg. The constraint equations. In The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields, pages 1–38. Birkhäuser, Basel, 2004.

[2] Piotr Bizoń, Tadeusz Chmaj, and Bernd G. Schmidt. Critical behavior in vacuum gravitational collapse in $4+1$ dimensions. Phys. Rev. Lett., 95(7) :071102, 4, 2005.

[3] Demetrios Christodoulou. Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data. Comm. Pure Appl. Math., 39(2) :267–282, 1986.

[4] Demetrios Christodoulou and Sergiu Klainerman. The global nonlinear stability of the Minkowski space, volume 41 of Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[5] Roberto Emparan and Harvey S. Reall. Black rings. Classical Quantum Gravity, 23(20) :R169–R197, 2006.

[6] Yvonne Fourès-Bruhat. Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Acta Math., 88 :141–225, 1952.

[7] Stefan Hollands and Akihiro Ishibashi. Asymptotic flatness and Bondi energy in higher dimensional gravity. J. Math. Phys., 46(2) :022503, 31, 2005.

[8] Stefan Hollands and Robert M. Wald. Conformal null infinity does not exist for radiating solutions in odd spacetime dimensions. Classical Quantum Gravity, 21(22) :5139–5145, 2004.

[9] Lars Hörmander. Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations, volume 26 of SMAI Mathématiques et Applications. Springer, New York, 1986.

[10] Lars Hörmander. On the fully nonlinear Cauchy problem with small data. II. In Microlocal analysis and nonlinear waves (Minneapolis, MN, 1988–1989), volume 30 of IMA Vol. Math. Appl., pages 51–81. Springer, New York, 1991.

[11] Satyanad Kichenassamy. Nonlinear wave equations, volume 194 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York, 1996.

[12] Sergiu Klainerman. The null condition and global existence to nonlinear wave equations. In Nonlinear systems of partial differential equations in applied mathematics, Part 1 (Santa Fe, N.M., 1984), volume 23 of Lectures in Appl. Math., pages 293–326. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[13] Ta-Tsien Li and Yun Mei Chen. Global classical solutions for nonlinear evolution equations, volume 45 of Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.

[14] Hans Lindblad and Igor Rodnianski. The global stability of the minkowski space-time in harmonic gauge. ArXiv :math.AP/0411109v1, 2004.

[15] Hans Lindblad and Igor Rodnianski. Global existence for the Einstein vacuum equations in wave coordinates. Comm. Math. Phys., 256(1) :43–110, 2005.

[16] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. Gravitation. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973.