7. Der Satz von Holmgren

Für lineare partielle Differentialgleichungen gilt ein Eindeutigkeitssatz, der auch einiges Licht auf die Bedeutung der Charakteristiken wirft.

Sei L ein linearer Differentialoperator der Ordnung m, der auf Funktionen $u : V \to \mathbb{C}^N$ wirkt und in der offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ glatte Koeffizienten hat. Dann kann man L einen ebensolchen L^*, den formal zu L adjungierten Operator, zuordnen so, daß für jeden in V enthaltenen kompakten Bereich D mit stückweise glattem Rand ∂D und Funktionen u, v der Klasse C^m die *Lagrange-Identität*

$$\int\limits_D v^T Lu\, dx = \int\limits_D (L^* v)^T u\, dx + \int\limits_{\partial D} M(u,v) df$$

gilt, worin $M(u,v)$ bilinear in u, v und deren Ableitungen bis zur Ordnung $m-1$ ist und df das Oberflächenelement von ∂D bezeichnet. Man erhält diese Identität durch mehrfache partielle Integration. Der Hauptteil von L^* stimmt bis auf den Faktor $(-1)^m$ mit dem von L überein, so daß L und L^* die gleichen Charakteristiken haben.

Satz von Holmgren:

L sei ein linearer Differentialoperator mit analytischen Koeffizienten. S sei eine für L freie, analytische Hyperfläche, S_0 ein kompakter Teil von S mit analytischem Rand ∂S_0. D sei ein Kompaktum, das von analytischen, für L freien, von ∂S_0 berandeten Hyperflächen überdeckt wird (ein „Linsenbereich", siehe Fig. 1). Dann hat die Gleichung $Lu = f$ (mit in D stetigem f) in D höchstens eine C^m-Lösung zu entsprechenden Cauchydaten auf S_0.

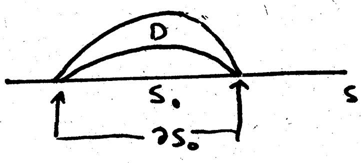


Fig. 1

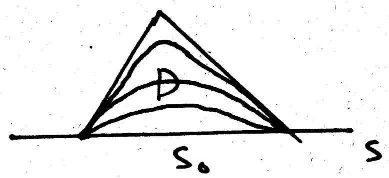


Fig. 2

Zum Beweis ist zu zeigen, daß $Lu = 0$ zu trivialen Daten auf S_0 nur die Lösung $u = 0$ hat. Dazu wähle man eine in D analytische Funktion g. Dann hat die adjungierte Gleichung $L^* v = g$ nach dem (hier anwendbaren) Satz von Cauchy-Kowalewskaya zu Nulldaten auf S_1 eine analytische Lösung v in D, falls S_1 hinreichend nahe bei S_0 liegt. (Sonst nehme man statt S_1 eine geeignete Fläche „zwischen" S_0 und S_1 und wende das folgende Argument schrittweise auf die Bereiche an, in die D dadurch zerlegt ist.) Dann ergibt die Lagrange-Identität wegen der Datenwahl

$$0 = \int\limits_D v^T Lu\, dx = \int\limits_D g^T u\, dx \quad .$$

Da jede stetige Funktion in D dort gleichmäßig durch Polynome approximierbar ist (Weierstraßscher Approximationssatz), ist u zu allen stetigen Funktionen in D orthogonal, also $u = 0$.

Bemerkungen:

(i) Wenn $Lu = f$ zu Daten auf S_0 eine Lösung hat, ist diese also in jedem Linsenbereich D durch diese Daten und die „Quelle“ f eindeutig bestimmt. Wir sagen dann, D sei ein ***Abhängigkeitsgebiet*** von S_0 für L. Man sieht hieraus, wie die Gestalten solcher Abhängigkeitsgebiete von der Menge der Charakteristiken abhängen. Um ein „zulässiges“ D zu erhalten, darf S_0 (nur) so deformiert werden, daß keine der Tangential-Hyperebenen der deformierten Hyperflächen charakteristisch ist. Im Fall der Klein-Gordon und Maxwell-Gleichungen z.B. ergibt sich daraus, daß die Lichtkegel Abhängigkeitsgebiete bestimmen (s. Fig. 2). Die „Geometrie der Charakteristiken“ wird noch öfter berührt werden; wir werden sie allerdings nicht sytematisch darstellen.

(ii) Das Holmgrensche Argument zeigt, wie — unabhängig von Analytizität — die Existenz von Lösungen von $L^*v = g$ mit der Eindeutigkeit der Lösungen von $Lu = f$ verknüpft ist. Insbesondere impliziert für selbstadjungierte $L(L^* = L)$ Existenz stets auch Eindeutigkeit.

(iii) Im Satz wird von S nur vorausgesetzt, daß es nirgends charakteristisch ist; im Fall der Klein-Gordon-Gleichung z.B. darf S sowohl raum- wie zeitartig sein.

(iv) Wenn S charakteristisch ist, versagt nicht nur der Beweis, sondern es besteht dann auch keine Eindeutigkeit mehr. Um bei einem charakteristischen Anfangswertproblem Eindeutigkeit zu erhalten, müssen Daten auf mehr als einer (glatten) Charakteristik gegeben werden; dies behandeln wir nicht. Im Fall der Wellengleichung ist die Mehrdeutigkeit bei ebenen Wellen offensichtlich.

(v) Für elliptische Gln. der Ordnung m folgt aus dem Holmgrenschen Satz: Wenn eine C^m-Lösung auf einem beliebigen analytischen Flächenstück gleich Null ist, so verschwindet sie auch in einer Umgebung dieses Stücks. Dies hängt mit der Analytizität solcher Lösungen zusammen.

8. Zurückführung des Cauchyproblems mit allgemeinen Daten auf das Standardproblem für lineare PDgln. („Duhamelprinzip“.)

Wir betrachten als Beispiel die Gleichung

$$Lu = A^{ik}\partial_i\partial_k u + B^i\partial_i u + Cu = f \tag{1}$$

mit $u : V \to \mathbb{C}^N$ und A^{ik}, B^i, C, f nur abhängig von $(t,x) \in V \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Das Cauchyproblem in allgemeiner Form verlangt, (1) zu lösen mit beliebig vorgegebener Quelle f und Daten

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x) \quad . \tag{2}$$

Als *Standard-CP* werde der Spezialfall $f = 0$, $u_0 = 0$ bezeichnet.

Das CP mit allgemeinen u_0, u_1, f ist auf das Standardproblem zurückführbar: Sei $w(t,x;s)$ eine einparametrige Schar von Lösungen der Standardprobleme

$$Lw = 0$$

$$\text{mit } \begin{cases} w(s,x;s) = 0 \\ \partial_t w(s,x;s) = f(s,x) - L(u_0 + tu_1)(s,x) \end{cases} .$$

Dann löst (wie man nachrechnet)

$$u(t,x) = u_0(x) + tu_1(x) + \underbrace{\int_0^t w(t,x;s)ds}_{\text{(Duhamel-Integral)}}$$

das Problem (1), (2).

Ähnlich läßt sich das allgemeine Problem (1), (2) auf dasjenige mit Nulldaten $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, aber beliebiger Quelle f zurückführen:
$u(t,x) = w(t,x) + u_0(x) + tu_1(x)$ löst (1), (2)
genau dann, wenn
$w(t,x)$ die Gl. $Lw = f - L(u_0 + tu_1)$ mit Nulldaten
löst.

Entsprechende Aussagen und Formeln gelten für Gleichungen beliebiger Ordnung.

Die angegebenen Formeln zeigen: Wenn der Wert der Lösung des Standardproblems an der Stelle (t,x) nur von den Daten in einem durch t, x und L bestimmten Teil der „Vergangenheit“ von t, x abhängt, so hängt der Wert der Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems an der Stelle t, x ebenfalls nur von den Daten und der Quelle in demselben Teil der Vergangenheit von t, x ab, m.a.W., zur Bestimmung von Abhängigkeitsgebieten genügt das Studium des Standardproblems. (Es ist vielleicht nützlich, sich diesen Sachverhalt an Hand eines Diagramms zu veranschaulichen.)

9. Der Satz von Paley-Wiener

Der bezeichnete Satz soll hier zitiert werden, da er in den Abschnitten 11 und 12 angewandt wird.

Satz:

$u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ sei C^∞, und für $|x| > R > 0$ sei $u(x) = 0$. Dann ist die *Fourier-Laplace-Transformierte* $\hat{u} : \mathbf{C}_n \to \mathbf{C}$,

$$\hat{u}(k) := (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-ikx} u(x) dx \tag{1}$$

ganz holomorph, und zu jeder natürlichen Zahl l gibt es eine Konstante C_l mit

$$|\hat{u}(k)| \leq C_l (1 + |k|)^{-l} e^{R|\mathcal{J}k|} \quad , \tag{2}$$

$\mathcal{J}k :=$ Imaginärteil von $k \in \mathbf{C}_n$. Ist umgekehrt $\hat{u}$ ganz holomorph und erfüllt $\hat{u}$ die Ungleichungen (2), so gibt es u wie oben, und außer (1) gilt die *Umkehrformel*

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbf{R}_n} e^{ikx} \hat{u}(k) dk \; .$$

Insbesondere zeigt (2), daß $^{\hat{u}}|_{\mathbf{R}_n}$ für $|k| \to \infty$ stärker als jede inverse Potenz von $|k|$ abfällt, also in $\mathcal{S}(\mathbf{R}_n)$ liegt. (Beweis z.B. in K. Yosida, Functional Analysis, p. 161.)

10. Hyperbolische Polynome

Bei der Untersuchung linearer partieller Differentialgleichungen spielt, wie in den Abschnitten 6 und 7 bemerkt wurde und später noch deutlicher werden wird, die charakteristische Form $q_m = \det \sigma_m$ eine wichtige Rolle. Dies gilt auch für das *charakteristische Polynom* $q := \det \sigma$, die Determinante des *Gesamtsymbols* σ des betr. Differentialoperators, das analog zu σ_m aus dem Operator durch die Ersetzung $\partial_i \to \xi_i$ gebildet wird. q und q_m sind Polynome in ξ_0, ξ_1, $\ldots \xi_n$ mit i.a. komplexen, x-abhängigen Koeffizientenfunktionen; q_m ist der homogene Summand höchsten Grades von q. Wir setzen Grad $q = p$; $p \leq mN$.

In diesem Abschnitt betrachten wir von jetzt an q und q_m an einer festen Stelle $x \in \mathbf{R}^{n+1}$, die wir nicht mehr erwähnen.

Da ξ in physikalischen Anwendungen meist die Bedeutung des Wellen-Kovektors hat, schreiben wir oft $\xi = (-w, k)$ entsprechend dem Phasenfaktor $e^{i(kx-wt)}$.

Eine Vorbemerkung: Für die Nullstellen w_l eines Polynoms der Form
$w^p + P_1(k)w^{p-1} + \ldots + P_p(k)$ mit Grad $P_j \leq j$, $k \in \mathbf{C}_n$
gilt eine Abschätzung

$$|w|^p \leq M\left\{(1+|k|)|w|^{p-1} + (1+|k|)^2|w|^{p-2} + \ldots\right\} \quad ,$$

also

$$\left(\frac{|w|}{1+|k|}\right)^p \leq M\left\{\left(\frac{|w|}{1+|k|}\right)^{p-1} + \ldots + 1\right\} \quad .$$

Folglich ist entweder $\dfrac{|w|}{1+|k|} < 1$ oder $\dfrac{|w|}{1+|k|} \leq Mp$, also jedenfalls $|w| < (1+pM)(1+|k|)$. Die Beträge der Nullstellen wachsen also für $|k| \to \infty$ höchstens linear in $|k|$.

Die Hyperbolizität eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen kann u.U. (siehe Abschnitte 11–13) an q_m oder q erkannt werden. Die folgenden Ausführungen dienen dafür als Vorbereitung. Zunächst zwei

Definitionen:

q heißt *hyperbolisch*, wenn es einen nicht charakteristischen Kovektor ξ, $q_m(\xi) \neq 0$, gibt derart, daß die Nullstellen λ_l des Polynoms $q(i\,[\lambda\xi + \eta])$ für alle $\eta \in \mathbf{R}_{n+1}$ in einer oberen Halbebene $\mathcal{J}\lambda \geq -c$, $c \in \mathbf{R}$, liegen. ξ heißt dann *raumartig* bezüglich q. (Bemerkung: ξ wird in diesem Kontext als Konormale eines Hyperflächenelements interpretiert und soll deshalb zugleich mit dem Hyperflächenelement raumartig genannt werden, abweichend von der Terminologie in der Relativitätstheorie.)

Wenn die Nullstelleneigenschaften nur für alle von ξ linear unabhängigen η zutrifft, dann sogar für alle η wegen der stetigen Abhängigkeit der Nullstellen eines Polynoms von dessen Koeffizienten.

Satz:

q sei hyperbolisch und ξ raumartig für q. Dann ist auch $-\xi$ raumartig.

Beweis: $q_m(-\xi) = (-1)^p q_m(\xi) \neq 0$. Außerdem ist $q(i\,[\lambda\xi + \eta]) = i^p q_m(\xi)\{\lambda^p[X^i(\xi)\eta_i + a(\xi)]\lambda^{p-1} + \ldots\}$ mit gewissen $X^i(\xi)$, $a(\xi)$. Für die Nullstellen λ_ℓ gilt also $\Sigma\lambda_\ell = a + X^i\eta_i$ und nach Voraussetzung $\Sigma\mathcal{J}\lambda_\ell = \mathcal{J}a + \eta_i\mathcal{J}X^i \geq -pc$ für beliebige $\eta \in \mathbf{R}_{n+1}$. Folglich ist $\mathcal{J}X^i = 0$ und $\Sigma\mathcal{J}\lambda_\ell = \mathcal{J}a =: b$. Daraus und aus der Voraussetzung $\mathcal{J}\lambda_\ell \geq -c$ folgt schließlich $\mathcal{J}\lambda_\ell = b - \sum_{j\neq l}\mathcal{J}\lambda_j \leq b + (p-1)c$. Die Nullstellen λ_l liegen also für beliebige η auch in einer „unteren" Halbebene, mithin in einem Streifen $|\mathcal{J}\lambda| \leq d$. Diese Eigenschaft bleibt offenbar erhalten bei Ersetzung von ξ durch $-\xi$, also λ_l durch $-\lambda_l$.

Wenn q homogen ist, also $q = q_m$, folgt aus $q(i[s\lambda\xi + s\eta]) = i^p s^p q(\lambda\xi + \eta)$ sofort der

Satz:

Ein homogenes Polynom q ist genau dann hyperbolisch und ξ raumartig für q, wenn $q(\xi) \neq 0$ ist und für alle reellen η sämtliche Nullstellen von $q(\lambda\xi + \eta)$ reell sind.

Wenn q homogen und hyperbolisch ist und ξ raumartig, ist der Koeffizient höchsten Grades in λ von $q(\lambda\xi + \eta)$ gleich $q(\xi)$, derjenige niedrigsten Grades $q(\eta)$. Wegen der Realität der Nullstellen ist also $q(\eta)/q(\xi)$ reell, d.h. das Polynom q ist bis auf den Faktor $q(\xi) \neq 0$ reell.

Aus den Definitionen ergibt sich weiter unmittelbar, daß ein Produkt von Polynomen genau dann hyperbolisch ist, wenn die Faktoren hyperbolisch sind und einen gemeinsamen raumartigen Kovektor haben.

Satz:

Wenn q hyperbolisch und ξ raumartig für q ist, so ist q_m hyperbolisch und ξ für q_m raumartig.

Beweis: Da $q_m(i[\lambda\xi + \eta]) = \lim_{\sigma\to\infty} q(i[\lambda\sigma\xi + \sigma\eta])$ ist, die Nullstellen eines Polynoms stetig von den Koeffizienten abhängen und für die Nullstellen von $q(i[\lambda\sigma\xi + \sigma\eta])$ bei festem ξ und alle q gilt $|\mathcal{J}\sigma\lambda| \leq d$, so gilt für die Nullstellen von $q_m(i[\lambda\xi + \eta])$ also $\mathcal{J}\lambda = 0$.

Es seien noch zwei weitere Sätze ohne Beweise mitgeteilt:

Satz:

Die Menge der raumartigen Vektoren eines hyperbolischen Polynoms besteht aus offenen, konvexen Zusammenhangskomponenten der Menge der nichtcharakteristischen Kovektoren [1].

Satz:

Wenn $q_m(\xi) \neq 0$ ist und $q_m(\lambda\xi + \eta)$ für alle von ξ linear unabhängigen $\eta \in \mathbf{R}_{n+1}$ lauter einfache, reelle Nullstellen λ_l hat, so ist q hyperbolisch und ξ raumartig für q; q heißt dann *strikt hyperbolisch* [2].

Bei den von uns betrachteten oder als Beispiele erwähnten hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen (der relativistischen *und* der nichtrelativistischen) Physik kommt in der charakteristischen Form q_m immer mindestens eine Lorentzform $w^2 - k^2$ als Faktor vor. Dann besteht die Menge der raumartigen Kovektoren von q aus genau zwei „entgegengesetzten" Komponenten Γ^+ und $\Gamma^- = -\Gamma^+$, wobei Γ^+ im „Zukunfts"-Halbkegel $w > |k|$ enthalten ist. (Der Rand von Γ^+ braucht nicht glatt zu sein.)

11. Lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Gårdings Hyperbolizitätskriterium

Die einfachsten partiellen Differentialgleichungen sind die linearen mit konstanten Koeffizienten, vgl. die Beispiele auf S. 5. Nur für diese Gleichungen ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des Cauchyproblems für beliebige C^∞-Daten (erst seit 1951) bekannt. Die Theorie dieser Gleichungen zeigt, wie in diesem Fall die Grundfragen (S. 14/15) beantwortet werden können und welche Rolle dabei die Begriffe Symbol, charakteristisches Polynom usw. spielen; sie bereitet zugleich die allgemeine Theorie vor.

Wir betrachten als Beispiel wieder die Gleichung

$$Lu = A^{ik}\partial_i\partial_k u + B^i\partial_i u + Cu = f \tag{1}$$

für eine N-komponentige Unbekannte $u(t,x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Die $N \times N$-Matrizen A^{ik}, B^i, C sollen jetzt natürlich konstante, i.a. komplexe Elemente haben. Alle Überlegungen dieses Abschnitts gelten ohne wesentliche Änderungen für Systeme beliebiger Ordnung an Stelle von (1). Die Gleichung (1) bleibt bei affinen Transformationen der Koordinaten t, x^i das $\mathbf{R}^{n+1}$ erhalten. Deshalb werden die folgenden Begriffe und Sätze i.a. affin-invariant formuliert.

Wir stellen folgende *Hauptfrage:* Zu welchen Gleichungen vom Typ (1) gibt es Hyperebenen, für die das CP mit beliebigen C^∞-Daten und beliebiger C^∞-Quelle f durch C^∞-Funktionen u lösbar ist?

Damit das CP für (1) mit Daten auf einer Hyperebene E so lösbar ist, muß E frei sein; denn sonst wären die Daten nicht beliebig vorgebbar (Siehe Abschnitt 6, S. 17). Sei also E frei und durch $x^0 = t = 0$ gegeben (Koordinatenwahl); dann ist $A^{00} \equiv A$ invertierbar.

Im Hinblick auf Abschnitt 8 genügt es, das Standardproblem zu untersuchen, also:

$$Lu = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x) \quad . \tag{2}$$

Wir nehmen zunächst den Träger von u_1 kompakt an,

$$u_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \quad . \tag{2'}$$

Da L linear und translationsinvariant ist, liegt es nahe, (2) durch Fouriertransformation zu lösen. Fouriertransformation bezüglich t eignet sich nicht für das Anfangswertproblem, weil sich die Bedingung $\partial_t u = u_1$ nicht „lokal" mit der bzgl. t Fourier-transformierten von u formulieren läßt. Wir setzen deshalb versuchsweise

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{ikx}\hat{u}(t,k)dk \quad , \tag{3}$$

$$u_1(x) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{ikx}\hat{u}_1(k)dk \tag{4}$$

und erhalten — zunächst formal — statt (2):

$$L(\partial_t, ik)\hat{u}(t,k) = 0 \quad , \tag{5}$$

$$\hat{u}(0,k) = 0, \quad \partial_t \hat{u}(0,k) = \hat{u}_1(k) \quad . \tag{6}$$

Diese Gleichungen beschreiben ein Standard-Anfangswertproblem für das System (5) *gewöhnlicher* Differentialgleichungen für $\hat{u}(t,k)$ mit k als Parameter. Wegen der Linearität ist die Lösung zu beliebigen Daten eine Linearkombination aus den N Lösungen zu den Daten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Faßt man diese Lösungen als Spalten einer Matrix $U(t,k)$ auf, so muß gelten

$$L(\partial_t, ik)U(t,k) = 0 \quad , \tag{7}$$

$$U(0,k) = 0, \quad \partial_t U(0,k) = 1 \quad ; \tag{8}$$

die Lösung von (5), (6) ist dann

$$\hat{u}(t,k) = U(t,k)\hat{u}_1(k) \quad . \tag{9}$$

Die Lösung zu (7), (8) läßt sich durch das Kurvenintegral

$$U(t,k) = \frac{-A}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_k} e^{iwt} \sigma^{-1}(-iw, ik)dw \tag{10}$$

darstellen. Es ist über eine Kurve Γ_k in der komplexen w-Ebene zu erstrecken, die alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$q(-iw, ik) = \det \sigma(-iw, ik) \tag{11}$$

positiv umläuft, z.B. über einen genügend großen Kreis. Hierbei ist σ das (in Abschnitt 10 definierte) Gesamtsymbol von L, und es ist wie in Abschnitt 10 $\xi = (-w, k)$ gesetzt.

Daß das Integral (10) die Gleichungen (7), $(8)_1$ erfüllt, folgt mittels des Cauchyschen Integralsatzes durch den Grenzübergang $\Gamma_k : |w| = R \to \infty$. Um auch $(8)_2$ einzusehen, entnehmen wir aus (1)

$$\sigma(-iw, ik) = -Aw^2(1 + O(|w|^{-1}) \quad ,$$

also

$$\sigma^{-1}(-iw, ik) = -A^{-1}w^{-2}(1 + O(|w|^{-1})) \quad .$$

(Die $\mathcal{O}$-Terme beziehen sich auf ein beliebiges, aber festes k.) Damit folgt $(8)_2$ mit $\Gamma_k \to \infty$.

Aus (3), (9) und (10) ergibt sich, zunächst formal, die Lösung des Problems (2):

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ikx} U(t,k)\hat{u}_1(k)dk \quad . \tag{12}$$

Dies Integral stellt tatsächlich eine C^∞-Lösung des Problems (2), (2') dar, falls Differentiationen beliebiger Ordnung nach t und den x^α mit der Integration vertauscht werden dürfen. Das wiederum ist der Fall, wenn alle Integrale der Form

$$\int k^{i_1}\dots k^{i_p}\partial_t^l U(t,k)\hat{u}_1(k)dk$$

für jedes $T>0$ im Bereich $|t|=T$, $k\in \mathbf{R}_n$ absolut und gleichmäßig konvergieren. Nun folgt aus der Voraussetzung (2') über u_1 und dem Satz von Paley-Wiener, daß $|\hat{u}|$ für $|k|\to\infty$ schneller als jede inverse $|k|$-Potenz abnimmt. Für die Rechtfertigung von (12) reicht also aus, daß

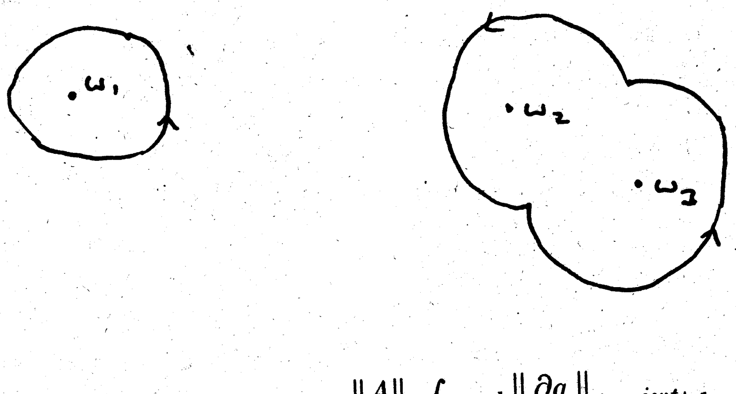
$$\partial_t^l U(t,k)=\frac{-A}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_k} e^{-iwt}(-iw)^l\sigma^{-1}(-iw,ik)dw \tag{13}$$

für jede natürliche Zahl l in $|t|\le T$ gleichmäßig höchstens polynomial in k wächst.

Um das Integral (13) abzuschätzen, benutzen wir die Matrixformel $\dfrac{\partial}{\partial\sigma}q=q(\sigma^{-1})^T$, die

$$\partial_t^l U(t,k)=\frac{(-i)^l(-A)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_k}\frac{w^l e^{-iwt}}{q(-iw,ik)}\left(\frac{\partial q}{\partial\sigma}\right)^T dw \tag{14}$$

ergibt. Γ_k werde so festgelegt: Um jede Nullstelle w_j von $q(-iw,ik)$ werde ein Einheitskreis geschlagen; die Vereinigung bzw. „Zusammensetzung" dieser Kreise sei Γ_k:



Dann folgt

$$|\partial_t^l U(t,k)|\le\frac{\|A\|}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_k}|w|^l\left\|\frac{\partial q}{\partial\sigma}\right\||e^{-iwt}|dw\quad .$$

Nun wachsen nach Abschnitt 10 die Nullstellenbeträge und damit auch die Werte von $|w|$ auf Γ_k höchstens polynomial, und das gilt auch für die Matrixnorm $\left\|\dfrac{\partial q}{\partial\sigma}\right\|$. Als hinreichend erweist sich also schließlich, daß $|e^{-iwt}|$ für alle reellen k und jedes Intervall $|t|\le T$ auf Γ_k beschränkt ist, was der Fall ist, wenn für alle k die Imaginärteile der Nullstellen w_j von $q(-iw,ik)$ in einem von k unabhängigen Streifen $|\mathcal{J}w|\le C$ liegen.

Diese letzte Eigenschaft bedeutet aber, daß q hyperbolisch und der Kovektor dt mit den Komponenten $(1,0,\ldots,0)$ bezüglich q raumartig ist, vgl. Abschnitt 10. Die Hyperebene $E(t=0)$ wird dann auch raumartig genannt.

Ergebnis: Das Standard-Cauchyproblem (2) mit (2′) hat eine C^∞-Lösung, wenn das charakteristische Polynom q von L hyperbolisch und die Anfangshyperebene für q raumartig ist. Eine Lösung wird (in ganz $\mathbf{R}^{n+1}$) durch

$$u(t,x) = \frac{-A}{(2\pi)^{1+n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}_n} dk\hat{u}_1(k) \int\limits_{\Gamma_k} e^{i(kx-wt)}\sigma^{-1}(-iw,ik)dw \tag{15}$$

dargestellt, worin $\hat{u}_1$ durch (4) bestimmt ist.

Da mit der durch $t=0$ beschriebenen Hyperebene auch alle dazu parallelen und aus Stetigkeitsgründen auch alle Hyperebenen mit Konormalen in einer Umgebung von dt für L frei sind, folgt aus dem Satz von Holmgren die *Eindeutigkeit* der Lösung des Standardproblems. Da nach demselben Satz jeder „Linsenbereich“ ein Abhängigkeitsbereich ist, hängt die Lösung in einem beliebigen Punkt $(t,x) \in \mathbf{R}^{n+1}$ nur von den Daten auf einem (von (t,x) abhängigen) kompakten Teil der Anfangshyperebene ab. Deshalb kann die Voraussetzung (2′) durch

$$u_1 \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \tag{2''}$$

ersetzt werden. Schließlich ist nach Abschnitt 8 auch die Einschränkung auf Standard-Daten unnötig. Die Hauptfrage wird also beantwortet durch den

Satz (Gårding):

Zu einer partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gibt es Hyperebenen, für die das Cauchyproblem mit beliebigen C^∞-Daten und Quellen durch C^∞-Funktionen lösbar ist, wenn das charakteristische Polynom q der Gleichung hyperbolisch ist. Das Problem ist dann lösbar für bzgl. q raumartige Hyperebenen. Die Lösung ist durch die Daten eindeutig bestimmt und wird durch (15) zusammen mit den Duhamel- Formeln dargestellt.

Bemerkungen:

(i) Gårding hat überdies gezeigt, daß die im ersten Teil des Satzes formulierte Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist; siehe [1].

(ii) Aus dem obigen Satz folgt direkt die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten („Cauchy-Stabilität“) mit Hilfe des Satzes über Abbildungen mit abgeschlossenen Graphen, angewandt auf die Abbildung des Fréchet-Raums der Daten in denjenigen der Lösungen; siehe [3].

(iii) Eine partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten heißt *strikt hyperbolisch*, wenn ihre charakteristische Form q_m es ist (im Sinn der Definition in Abschnitt 10). Wegen der Einfachheit der Nullstellen w_j kann man im Fall einer homogenen ($q = q_m$), strikt hyperbolischen Gleichung die w-Integration in (15) mit Hilfe des Residuenssatzes ausführen. Dann ist

$$V = \sup_{\substack{j \\ k+ik' \in \mathbb{C}_n}} \frac{|\mathcal{J} w_j|}{1+|k'|}$$

endlich, und es läßt sich mit dem Paley-Wiener-Satz zeigen, daß Wirkungen sich höchstens mit der Geschwindigkeit V ausbreiten, d.h. daß sich entsprechend dieser Vorstellung Abhängigkeitsgebiete bestimmen lassen; siehe [2].

(iv) Ersetzt man in (15) $\hat{u}_1$ durch das Fourierintegral über u_1, so erhält man eine lineare Integraldarstellung der Lösung $u(t,x)$ durch das Datum $u_1(x)$. Diese Darstellung läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen in die Darstellung mit Hilfe einer *Greenfunktion* umformen.

LITERATUR

[1]Hörmander, L.: The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol.II *Springer*, Berlin: 1983

[2]John, F.: Partial Differential Equations. *Springer*, New York: 1978

[3]Trèves, F.: Basic Linear Differential Equations. *Academic Press*, New York: 1975