11. Lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Gårdings Hyperbolizitätskriterium

Die einfachsten partiellen Differentialgleichungen sind die linearen mit konstanten Koeffizienten, vgl. die Beispiele auf S. 5. Nur für diese Gleichungen ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des Cauchyproblems für beliebige C^∞-Daten (erst seit 1951) bekannt. Die Theorie dieser Gleichungen zeigt, wie in diesem Fall die Grundfragen (S. 14/15) beantwortet werden können und welche Rolle dabei die Begriffe Symbol, charakteristisches Polynom usw. spielen; sie bereitet zugleich die allgemeine Theorie vor.

Wir betrachten als Beispiel wieder die Gleichung

$$Lu = A^{ik}\partial_i\partial_k u + B^i\partial_i u + Cu = f \tag{1}$$

für eine N-komponentige Unbekannte $u(t,x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Die $N \times N$-Matrizen A^{ik}, B^i, C sollen jetzt natürlich konstante, i.a. komplexe Elemente haben. Alle Überlegungen dieses Abschnitts gelten ohne wesentliche Änderungen für Systeme beliebiger Ordnung an Stelle von (1). Die Gleichung (1) bleibt bei affinen Transformationen der Koordinaten t, x^i das $\mathbf{R}^{n+1}$ erhalten. Deshalb werden die folgenden Begriffe und Sätze i.a. affin-invariant formuliert.

Wir stellen folgende *Hauptfrage:* Zu welchen Gleichungen vom Typ (1) gibt es Hyperebenen, für die das CP mit beliebigen C^∞-Daten und beliebiger C^∞-Quelle f durch C^∞-Funktionen u lösbar ist?

Damit das CP für (1) mit Daten auf einer Hyperebene E so lösbar ist, muß E frei sein; denn sonst wären die Daten nicht beliebig vorgebbar (Siehe Abschnitt 6, S. 17). Sei also E frei und durch $x^0 = t = 0$ gegeben (Koordinatenwahl); dann ist $A^{00} \equiv A$ invertierbar.

Im Hinblick auf Abschnitt 8 genügt es, das Standardproblem zu untersuchen, also:

$$Lu = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x) \quad . \tag{2}$$

Wir nehmen zunächst den Träger von u_1 kompakt an,

$$u_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \quad . \tag{2'}$$

Da L linear und translationsinvariant ist, liegt es nahe, (2) durch Fouriertransformation zu lösen. Fouriertransformation bezüglich t eignet sich nicht für das Anfangswertproblem, weil sich die Bedingung $\partial_t u = u_1$ nicht „lokal“ mit der bzgl. t Fourier-transformierten von u formulieren läßt. Wir setzen deshalb versuchsweise

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{ikx}\hat{u}(t,k)dk \quad , \tag{3}$$

$$u_1(x) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{ikx}\hat{u}_1(k)dk \tag{4}$$

und erhalten — zunächst formal — statt (2):

$$L(\partial_t, ik)\hat{u}(t,k) = 0 \quad , \tag{5}$$

$$\hat{u}(0,k) = 0, \quad \partial_t\hat{u}(0,k) = \hat{u}_1(k) \quad . \tag{6}$$

Diese Gleichungen beschreiben ein Standard-Anfangswertproblem für das System (5) *gewöhnlicher* Differentialgleichungen für $\hat{u}(t,k)$ mit k als Parameter. Wegen der Linearität ist die Lösung zu beliebigen Daten eine Linearkombination aus den N Lösungen zu den Daten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Faßt man diese Lösungen als Spalten einer Matrix $U(t,k)$ auf, so muß gelten

$$L(\partial_t, ik)U(t,k) = 0 \quad , \tag{7}$$

$$U(0,k) = 0, \quad \partial_t U(0,k) = 1 \quad ; \tag{8}$$

die Lösung von (5), (6) ist dann

$$\hat{u}(t,k) = U(t,k)\hat{u}_1(k) \quad . \tag{9}$$

Die Lösung zu (7), (8) läßt sich durch das Kurvenintegral

$$U(t,k) = \frac{-A}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_k} e^{iwt}\sigma^{-1}(-iw, ik)dw \tag{10}$$

darstellen. Es ist über eine Kurve Γ_k in der komplexen w-Ebene zu erstrecken, die alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$q(-iw, ik) = \det \sigma(-iw, ik) \tag{11}$$

positiv umläuft, z.B. über einen genügend großen Kreis. Hierbei ist σ das (in Abschnitt 10 definierte) Gesamtsymbol von L, und es ist wie in Abschnitt 10 $\xi = (-w, k)$ gesetzt.

Daß das Integral (10) die Gleichungen (7), $(8)_1$ erfüllt, folgt mittels des Cauchyschen Integralsatzes durch den Grenzübergang $\Gamma_k : |w| = R \to \infty$. Um auch $(8)_2$ einzusehen, entnehmen wir aus (1)

$$\sigma(-iw, ik) = -Aw^2(1 + O(|w|^{-1}) \quad ,$$

also

$$\sigma^{-1}(-iw, ik) = -A^{-1}w^{-2}(1 + O(|w|^{-1})) \quad .$$

(Die $\mathcal{O}$-Terme beziehen sich auf ein beliebiges, aber festes k.) Damit folgt $(8)_2$ mit $\Gamma_k \to \infty$.

Aus (3), (9) und (10) ergibt sich, zunächst formal, die Lösung des Problems (2):

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ikx}U(t,k)\hat{u}_1(k)dk \quad . \tag{12}$$

Dies Integral stellt tatsächlich eine C^∞-Lösung des Problems (2), (2') dar, falls Differentiationen beliebiger Ordnung nach t und den x^α mit der Integration vertauscht werden dürfen. Das wiederum ist der Fall, wenn alle Integrale der Form

$$\int k^{i_1} \dots k^{i_p} \partial_t^l U(t,k) \hat{u}_1(k) dk$$

für jedes $T > 0$ im Bereich $|t| = T$, $k \in \mathbf{R}_n$ absolut und gleichmäßig konvergieren. Nun folgt aus der Voraussetzung (2') über u_1 und dem Satz von Paley-Wiener, daß $|\hat{u}|$ für $|k| \to \infty$ schneller als jede inverse $|k|$-Potenz abnimmt. Für die Rechtfertigung von (12) reicht also aus, daß

$$\partial_t^l U(t,k) = \frac{-A}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_k} e^{-iwt}(-iw)^l \sigma^{-1}(-iw, ik) dw \tag{13}$$

für jede natürliche Zahl l in $|t| \leq T$ gleichmäßig höchstens polynomial in k wächst.

Um das Integral (13) abzuschätzen, benutzen wir die Matrixformel $\frac{\partial}{\partial \sigma} q = q(\sigma^{-1})^T$, die

$$\partial_t^l U(t,k) = \frac{(-i)^l(-A)}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{w^l e^{-iwt}}{q(-iw, ik)} \left(\frac{\partial q}{\partial \sigma}\right)^T dw \tag{14}$$

ergibt. Γ_k werde so festgelegt: Um jede Nullstelle w_j von $q(-iw, ik)$ werde ein Einheitskreis geschlagen; die Vereinigung bzw. „Zusammensetzung“ dieser Kreise sei Γ_k:

Dann folgt

$$|\partial_t^l U(t,k)| \leq \frac{\|A\|}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_k} |w|^l \left\| \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\| |e^{-iwt}| dw \quad .$$

Nun wachsen nach Abschnitt 10 die Nullstellenbeträge und damit auch die Werte von $|w|$ auf Γ_k höchstens polynomial, und das gilt auch für die Matrixnorm $\left\| \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\|$. Als hinreichend erweist sich also schließlich, daß $|e^{-iwt}|$ für alle reellen k und jedes Intervall $|t| \leq T$ auf Γ_k beschränkt ist, was der Fall ist, wenn für alle k die Imaginärteile der Nullstellen w_j von $q(-iw, ik)$ in einem von k unabhängigen Streifen $|\mathcal{J} w| \leq C$ liegen.

Diese letzte Eigenschaft bedeutet aber, daß q hyperbolisch und der Kovektor dt mit den Komponenten $(1,0,\ldots,0)$ bezüglich q raumartig ist, vgl. Abschnitt 10. Die Hyperebene $E(t=0)$ wird dann auch raumartig genannt.

Ergebnis: Das Standard-Cauchyproblem (2) mit (2′) hat eine C^∞-Lösung, wenn das charakteristische Polynom q von L hyperbolisch und die Anfangshyperebene für q raumartig ist. Eine Lösung wird (in ganz $\mathbf{R}^{n+1}$) durch

$$u(t,x) = \frac{-A}{(2\pi)^{1+n/2}} \int_{\mathbf{R}_n} dk\hat{u}_1(k) \int_{\Gamma_k} e^{i(kx-wt)}\sigma^{-1}(-iw,ik)dw \tag{15}$$

dargestellt, worin $\hat{u}_1$ durch (4) bestimmt ist.

Da mit der durch $t=0$ beschriebenen Hyperebene auch alle dazu parallelen und aus Stetigkeitsgründen auch alle Hyperebenen mit Konormalen in einer Umgebung von dt für L frei sind, folgt aus dem Satz von Holmgren die *Eindeutigkeit* der Lösung des Standardproblems. Da nach demselben Satz jeder „Linsenbereich" ein Abhängigkeitsbereich ist, hängt die Lösung in einem beliebigen Punkt $(t,x) \in \mathbf{R}^{n+1}$ nur von den Daten auf einem (von (t,x) abhängigen) kompakten Teil der Anfangshyperebene ab. Deshalb kann die Voraussetzung (2′) durch

$$u_1 \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \tag{2''}$$

ersetzt werden. Schließlich ist nach Abschnitt 8 auch die Einschränkung auf Standard-Daten unnötig. Die Hauptfrage wird also beantwortet durch den

Satz (Gårding):

Zu einer partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gibt es Hyperebenen, für die das Cauchyproblem mit beliebigen C^∞-Daten und Quellen durch C^∞-Funktionen lösbar ist, wenn das charakteristische Polynom q der Gleichung hyperbolisch ist. Das Problem ist dann lösbar für bzgl. q raumartige Hyperebenen. Die Lösung ist durch die Daten eindeutig bestimmt und wird durch (15) zusammen mit den Duhamel- Formeln dargestellt.

Bemerkungen:

(i) Gårding hat überdies gezeigt, daß die im ersten Teil des Satzes formulierte Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist; siehe [1].

(ii) Aus dem obigen Satz folgt direkt die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten („Cauchy-Stabilität") mit Hilfe des Satzes über Abbildungen mit abgeschlossenen Graphen, angewandt auf die Abbildung des Fréchet-Raums der Daten in denjenigen der Lösungen; siehe [3].

(iii) Eine partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten heißt *strikt hyperbolisch*, wenn ihre charakteristische Form q_m es ist (im Sinn der Definition in Abschnitt 10). Wegen der Einfachheit der Nullstellen w_j kann man im Fall einer homogenen ($q = q_m$), strikt hyperbolischen Gleichung die w-Integration in (15) mit Hilfe des Residuenssatzes ausführen. Dann ist

$$V = \sup_{\substack{j \\ k+ik' \in \mathbb{C}_n}} \frac{|\mathcal{J} w_j|}{1+|k'|}$$

endlich, und es läßt sich mit dem Paley-Wiener-Satz zeigen, daß Wirkungen sich höchstens mit der Geschwindigkeit V ausbreiten, d.h. daß sich entsprechend dieser Vorstellung Abhängigkeitsgebiete bestimmen lassen; siehe [2].

(iv) Ersetzt man in (15) $\hat{u}_1$ durch das Fourierintegral über u_1, so erhält man eine lineare Integraldarstellung der Lösung $u(t,x)$ durch das Datum $u_1(x)$. Diese Darstellung läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen in die Darstellung mit Hilfe einer *Greenfunktion* umformen.

LITERATUR

[1]Hörmander, L.: The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol.II *Springer*, Berlin: 1983

[2]John, F.: Partial Differential Equations. *Springer*, New York: 1978

[3]Trèves, F.: Basic Linear Differential Equations. *Academic Press*, New York: 1975

12. Lineare hyperbolische Gleichungen

Wir wollen jetzt den Begriff der Hyperbolizität allgemeiner betrachten. Mit anderen Worten geht es um die Frage, wann für eine gegebene partielle Differentialgleichung Lösungen zu allen Cauchy-Daten auf einer gegebenen Hyperfläche S existieren. Wie wir schon gesehen haben, gibt es eine ziemlich befriedigende Antwort, solange wir uns auf Gleichungen mit analytischen Koeffizienten und auf analytische Daten beschränken. Nämlich, S soll nicht charakteristisch sein. Wir haben aber auch gesehen, daß analytische Daten für physikalische Zwecke nicht ausreichen. Ich werde hier den Fall linearer Gleichungen diskutieren, deren Koeffizienten und Daten C^∞ sind. Ich hätte auch andere Differenzierbarkeitsklassen betrachten können, aber das würde für diese Diskussion nicht viel bringen. Ich nehme als Ausgangspunkt folgende

Definitionen: Eine Gleichung ist hyperbolisch bezüglich einer Hyperfläche S, wenn zu jedem Cauchy-Datum der Klasse C^∞ auf S eine entsprechende Lösung in einer Umgebung von S existiert. — Eine Gleichung heißt hyperbolisch wenn es Hyperflächen mit dieser Eigenschaft gibt. — Eine raumartige Hyperfläche ist dann eine, die diese Eigenschaft hat. Diese Definitionen sind aus folgenden Gründen unbefriedigend. Um zu zeigen, daß eine Gleichung in diesem Sinne hyperbolisch ist, muß man einen Satz beweisen. Man hätte gern ein Kriterium für hyperbolische Gleichungen, solches daß man sich die Gleichung nur anschauen muß um festzustellen, ob Hyperbolizität vorliegt oder nicht.

Ich betrachte zunächst eine lineare Gleichung folgender Form:

$$\sum_{p\leq m} a^{i_1\cdots i_p}(x)\partial_{i_1}\ldots\partial_{i_p}u = 0 \qquad (1)$$

Die Funktion u darf vektorwertig sein, was bedeutet, daß Systeme von Gleichungen mitbehandelt werden. Wann ist die Gleichung (1) hyperbolisch? Sind die Koeffizienten konstant, so hat man das allgemeine Kriterium von Gårding. Für nicht konstante Koeffizienten gibt es so etwas nicht. Man muß sich vielmehr auf spezielle Klassen von Gleichungen einschränken, wo man mehr sagen kann.

Es ist nicht überraschend, daß die Charakteristiken auch hier eine wichtige Rolle spielen. Im skalaren Fall sieht die charakteristische Gleichung folgendermaßen aus.

$$\sum a^{i_1\cdots i_m}(x)\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m} = 0 \qquad (2)$$

Eine Hyperfläche ist charakteristisch für die Gleichung (1), wenn alle ihre Tangenten in jedem Punkt x annulliert werden von einem ξ, das die Gleichung (2) erfüllt. Im Fall, daß u vektorwertig ist und die Koeffizienten infolgedessen matrixwertig, muß man statt des Hauptsymbols dessen Determinante in Gleichung (2) nehmen.

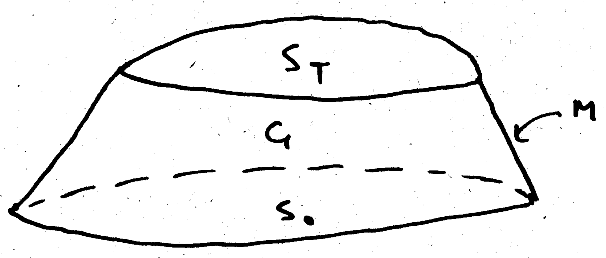
Eine für die Physik besonders wichtige Klasse von Gleichungen ist die der *symmetrisch hyperbolischen* Gleichungen. Das sind Gleichungen erster Ordnung der Form

$$A^0(x^0,x^\alpha)\partial_0 u + A^\alpha(x^0,x^\alpha)\partial_\alpha u + B(x^0,x^\alpha,u) = 0 \quad , \qquad (3)$$

wobei A^0 and A^α hermitesche Matrizen sind. Damit die Gleichung symmetrisch hyperbolisch ist, soll es Kovektoren ξ geben mit der Eigenschaft, daß $A^i\xi_i$ definit ist. Die dazugehörigen Flächenelemente sind dann, wie sich herausstellen wird, raumartig. Die charakteristischen Kovektoren sind diejenigen, für die $A^i\xi_i$ singulär ist. Für Gleichungen der Form (3) gelten die sogenannten *Energieabschätzungen.* (Das Wort Energie hat in diesem Zusammenhang, ausser in speziellen Beispielen, nichts mit physikalischer Energie zu tun.) Eine solche Abschätzung hat (für eine homogene Gleichung) die Form

$$\|u\| \leq C\|v\| \tag{4}$$

Hier bedeutet v das Anfangsdatum für u. Die Normen sind *Sobolev-Normen,* die ich hier nicht näher diskutieren möchte. Sie messen in Integralform die Grösse einer Funktion zusammen mit einer bestimmten Anzahl ihrer Ableitungen und verallgemeinern die wohlbekannte L^2 Norm für quadratintegrable Funktionen. Ich werde jetzt als Beispiel zeigen, wie man die erste solche Abschätzung, nämlich die für die L^2 Norm, herleiten kann. Ich nehme an, daß die Hyperflächen t =const raumartig sind. Deshalb ist A^0 definit (ohne Verlust der Allgemeinheit positiv definit) und hat eine positiv definite Wurzel $(A^0)^{1/2}$. Wenn man $w = (A^0)^{1/2}u$ definiert und in die Gleichung einsetzt, bekommt man eine Gleichung für w, die auch symmetrisch hyperbolisch ist und in der an Stelle von A^0 die Identität steht. Die gesuchte Abschätzung für u ist der für w äquivalent. Folglich brauchen wir nur den Fall $A^0 = I$ zu betrachten. Wir betrachten ein kompaktes Gebiet G folgender Form:



S_t ist der Durchschnitt von G mit der Hyperfläche t =const. Der „Mantel" M des Randes ∂G soll glatt sein und die Eigenschaft haben, daß die Matrix $A^i\nu_i$ in jedem Punkt negativ semidefinit ist. Dabei ist ν ein Konormalenvektor zu ∂G, der nach innen gerichtet ist. Die Hyperflächenelemente, die zu dieser Hyperfläche tangential sind, sind entweder raumartig oder charakteristisch. Eine solches charakteristisches Hyperflächenelement ist ein Grenzwert von raumartigen Hyperflächenelementen. $\langle\ ,\ \rangle_t$ soll die L^2-Norm auf der Hyperfläche S_t sein. Weil S_t von t abhängt, treten im Folgenden Randterme auf. Jetzt müssen wir nur noch rechnen:

$$\begin{aligned}
\partial_t\langle u,u\rangle_t &= 2\mathrm{Re}\langle u,\partial_t u\rangle_t + \langle \nu_0 u,u\rangle_{\partial S_t}\\
&= 2\mathrm{Re}\langle u,-A^\alpha\partial_\alpha u - Bu\rangle_t + \langle \nu_0 u,u\rangle_{\partial S_t}\\
\langle u,A^\alpha\partial_\alpha u\rangle_t &= -\langle u,(\partial_\alpha A^\alpha)u\rangle_t - \langle u,A^\alpha\partial_\alpha u\rangle_t - \langle u,A^\alpha\nu_\alpha u\rangle_{\partial S_t}\\
\Rightarrow 2\mathrm{Re}\langle A^\alpha\partial_\alpha u,u\rangle_t &= \langle u,(\partial_\alpha A^\alpha)u\rangle_t + \langle u,A^\alpha\nu_\alpha u\rangle_{\partial S_t}\\
\Rightarrow \partial_t\langle u,u\rangle_t &= \langle u,(\partial_\alpha A^\alpha - B)u\rangle_t + \langle A^i\nu_i u,u\rangle_t\\
&\leq \langle u,(\partial_i A^i - B)u\rangle_t\\
&\leq C\langle u,u\rangle_t
\end{aligned}$$

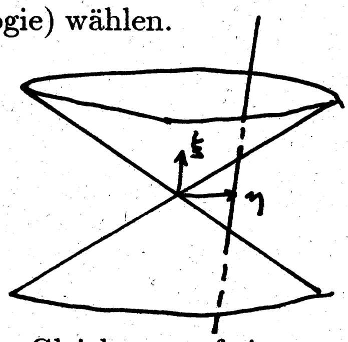
Mit Hilfe dieser Beziehung können wir $\langle u, u \rangle_t$ durch $\langle u, u \rangle_0$ abschätzen. Die gesuchte Ungleichung $\langle u, u \rangle_G \leq C \langle u, u \rangle_0$ folgt daraus durch Integration von 0 bis T.

Aus der Ungleichung (4) folgt unmittelbar die ***Eindeutigkkeit*** von Lösungen in einem Gebiet der Form G mit gegebenen Anfangsdaten, wie man folgendermaßen sehen kann. Wenn zwei Lösungen existieren zu gegebenen Anfangsdaten, erfüllt die Differenz der beiden eine homogene symmetrisch hyperbolische Gleichung mit Anfangsdaten null. Es folgt aus (4) daß diese Differenz im ganzen Gebiet G verschwinden muß. Wir sehen auch, daß die Definition der Hyperbolizität, die am Anfang gegeben wurde, für solche Gleichungen ***lokal*** ist; denn wenn wir die Existenz lokaler Lösungen nachweisen können, können wir die Eindeutigkeit benutzen, um diese lokalen Lösungen zu einer Lösung in einer Umgebung der ganzen Anfangshyperfläche 'zusammenflicken', wie wir im analytischen Fall schon gesehen haben. Die Ungleichung (4) bedeutet auch, daß Lösungen, falls welche existieren, ***stetig*** von den Daten abhängen. Damit ist die Instabilität, die beim Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung vorkommt (Abschnitt 5), ausgeschlossen.

Wenn man *Existenz* für das Anfangswertproblem zeigen will, kann man in diesem Fall folgendermaßen vorgehen. Zuerst approximiert man die Daten und die Koeffizienten der Gleichung mit analytischen Funktionen. Sei v_n eine Folge von analytischen Daten, die in der gegebenen Norm gegen v konvergiert. Für Koeffizienten, die nahe sind denen der ursprünglichen Gleichung, kann die Konstante in (4) unabhängig von diesen Koeffizienten gewählt werden. Mit Hilfe des Satzes von Cauchy-Kowalewskaya bekommt man analytische Lösungen u_n zu den Daten v_n (vgl. Bemerkung 3, S. 39/40). Die Ungleichung (4) zeigt, daß, wenn v_n eine Cauchy-Folge ist, so auch u_n. Deshalb hat die Folge u_n einen Grenzwert u. (Dabei verwendet man die Tatsache, daß die Sobolev-Räume vollständig sind.) Wenn genügend viele Ableitungen in der Norm enthalten sind, wird u die Gleichung (3) lösen mit Anfangsdatum v. Daß diese Lösungen für C^∞ Anfangsdaten auch C^∞ sind, ist eine Folge der Einbettungssätze für Sobolev-Normen. Also gilt

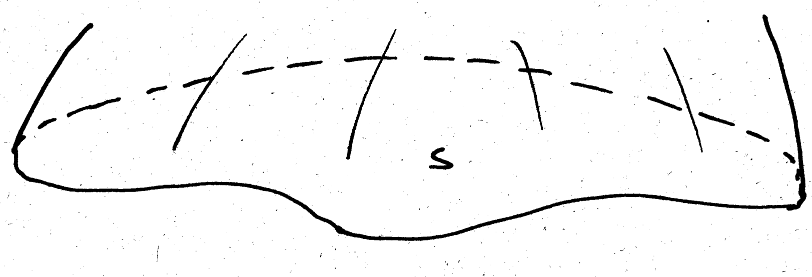
Satz 1: Sei G ein Gebiet im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit den oben eingeführten Eigenschaften bezüglich der Gleichung (3). Für jede C^∞ Funktion v auf $S_0 = \{(x,t) \in G : t = 0\}$ gibt es eine eindeutige C^∞ Lösung u der Gleichung (3) auf G, deren Einschränkung auf S_0 mit v übereinstimmt.

Eine andere wichtige Klasse von Gleichungen ist die der ***strikt hyperbolischen*** Gleichungen. Diese Gleichungen sind durch folgende Eigenschaft charakterisiert. (Wir nehmen an, daß der Vektor u in Gleichung (1) N Komponenten hat und daß, wie vorher, die Ordnung der Gleichung m ist.) In jedem Punkt x existiert ein ξ derart, daß für jedes $\eta \neq 0$, linear unabhängig von ξ, die Gerade $\eta + \lambda\xi$ den charakteristischen Kegel in genau Nm Punkten trifft. Das Flächenelement eines solchen Kovektors ξ heißt dann raumartig (vgl. S. 26). Für die meisten hyperbolischen Gleichungen der Physik ist diese Definition nicht allgemein genug. Man sollte auch Gleichungen einschließen, deren Hauptteil in eine direkte Summe von strikt hyperbolischen Operatoren zerfällt. Damit wären zum Beispiel die Maxwellgln. und die (allerdings semilinearen) Yang-Mills Gleichungen in der Form von Gleichungen zweiter Ordnung (Abschnitt 2) eingeschlossen. Die genaue Definition ist aber zu kompliziert, als daß ich sie hier angeben könnte. Das bekannteste Beispiel für eine strikt hyperbolische Gleichung ist die Wellengleichung auf einer Raumzeit mit Metrik g_{ij}. Die charakteristische Gleichung ist $g^{ij}\xi_i\xi_j = 0$ und der charakteristische Kegel im Punkt x ist der Lichtkegel im Kotangentialraum in diesem Punkt. Daß diese Gleichung strikt hyperbolisch ist, ist geometrisch leicht einzusehen; man muß einfach ξ zeitartig (in der relativistischen Terminologie) wählen.



Es ist relativ einfach, diese Gleichung auf ein symmetrisch hyperbolisches System zurückzuführen, indem man die Ableitungen erster Ordnung der Funktion u als zusätzliche Unbekannte nimmt, um dadurch ein System erster Ordnung zu erhalten. Einen Spezialfall davon haben wir schon in Abschnitt 4 gesehen; der allgemeine Fall wird von Courant-Hilbert durchgeführt. Für eine allgemeine strikt hyperbolische Gleichung funktioniert dies nicht ohne weiteres. Es gibt aber raffiniertere Argumente mit deren Hilfe man die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems für strikt hyperbolische Gleichungen aus den entsprechenden Aussagen für symmetrisch hyperbolische Gleichungen schließen kann. Dies ist die übliche Methode.

Als nächstes möchte ich den Begriff *Abhängigkeitsgebiet* diskutieren. Hyperbolische Gleichungen (oder zumindest diejenigen, die wir hier betrachten) beschreiben Vorgänge, die sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Dies bedeutet, daß die Lösung in einem bestimmten Punkt nur von den Anfangsdaten auf einer bestimmten kompakten Teilmenge der Anfangshyperfläche abhängt. Es gibt leider zwei verschiedene gängige Definitionen des Abhängigkeitsgebiets. Sie sind verwandt, aber keineswegs äquivalent. Die erste Definition, die man im Buch von Courant& Hilbert findet, werde ich hier nicht angeben, weil die Definition, die in der Literatur über Relativitätstheorie meistens verwendet wird (z.b. Hawking& Ellis), ein Spezialfall der anderen Möglichkeit ist. Betrachten wir als Beispiel die Wellengleichung lokal auf irgendeiner Raumzeit. Dann sieht 'das' Abhängigkeitsgebiet folgendermaßen aus:



Der Rand dieses Abhängigkeitsgebiets wird in diesem Fall erzeugt von Nullgeodätischen, die senkrecht zum Rand von S anfangen. Diese Nullgeodätischen sind die charakteristischen Strahlen für diese Gleichung. Das *Abhängigkeitsgebiet* eines Stücks S einer Anfangshyperfläche besteht aus Punkten p, so daß die Lösung im Punkt p eindeutig bestimmt ist durch die Anfangswerte auf S. Diese Definition ist nicht eindeutig, und deshalb sollte man eigentlich nicht von *dem* Abhängigkeitsgebiet reden, sondern von *einem* Abhängigkeitsgebiet. Man könnte eine eindeutige Definition erhalten durch die Forderung, daß das Gebiet das maximale sein sollte, das die frühere Definition erfüllt. Dieses maximale Gebiet kann aber schwer zu bestimmen sein wegen der Existenz von speziellen Gleichungen, die das Huygensche Prinzip oder Ähnliches erfüllen.

13. Nichtlineare hyperbolische Gleichungen

Eine nichtlineare Gleichung heißt symmetrisch hyperbolisch bzw. strikt hyperbolisch, wenn die linearisierte Gleichung um jedes u symmetrisch bzw. strikt hyperbolisch ist. Diese Bezeichnung wird auch verwendet, wenn die linearisierte Gleichung die betreffende Eigenschaft hat, vorausgesetzt, daß die Werte von u in irgendeiner (nicht leeren) offenen Menge liegen. Eine quasilineare symmetrisch hyperbolische Gleichung sieht aus wie Gleichung (3). Der einzige Unterschied ist, daß die A^i von u abhängen dürfen. Als Beispiel können wir das Euler-System der Hydrodynamik betrachten. Einfachheitshalber werde ich nur die nichtrelativistischen Gleichungen im Falle von zwei Raumdimensionen aufschreiben. Die relativistischen Gleichungen in drei Raumdimensionen sind sehr ähnlich. Als unbekannte Funktion nehme ich den Vektor (μ, u, v) wobei μ die Massendichte ist und u und v die Komponenten der Geschwindigkeit sind. Die Schallgeschwindigkeit ist c mit $c^2 = \partial p/\partial\mu > 0$. Die Koeffizienten sind dann durch folgende Matrizen gegeben.

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1/\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu/c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} u/\mu & 1 & 0 \\ 1 & \mu u/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu u/c^2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} v/\mu & 0 & 1 \\ 0 & \mu v/c^2 & 0 \\ 1 & 0 & \mu v/c^2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix B ist in diesem Fall gleich Null. Offenbar können die Gleichungen nur in dieser Form geschrieben werden, falls $\mu \neq 0$. Ein Beispiel einer strikt hyperbolischen Gleichung bietet die nichtlineare Wellengleichung

$$A^{ij}(x,u)\partial_i\partial_j u + F(x,u,\partial_k u) = 0 \tag{5}$$

für eine reelle skalare Unbekannte u. An diesem Beispiel sehen wir, daß für eine nichtlineare Gleichung die Charakteristiken im allgemeinen von der Lösung abhängen. In diesem Fall sind sie die Nullhyperflächen von $A^{ij}(x,u)$. Wie zeigt man, daß eine quasilineare Gleichung, die in diesem Sinne symmetrisch oder strikt hyperbolisch ist, tatsächlich hyperbolisch ist im Sinne der früher angegebenen Definition? Um Existenz von Lösungen des Anfangswertproblems zu beweisen, benutzt man normalerweise eine bestimmte Art Iteration. Ich werde sie im Detail für die Gleichung (5) beschreiben; die Iteration für andere Gleichungen sieht sehr ähnlich aus. Man löst iterativ die Gleichungen

$$A^{ij}(x,u_n)\partial_i\partial_j u_{n+1} + F(x,u_n,\partial_k u_n) = 0 \tag{6}$$

mit gegebenen Anfangsdaten. Die schon vorhandene lineare Theorie sorgt dafür, daß solche Lösungen existieren. Wenn wir eine Abbildung I definieren durch $I(u_n) = u_{n+1}$, dann ist ein Fixpunkt von I eine Lösung der Gleichung (5). Man kann in der Tat zeigen, daß, wenn man die Lösung in einer hinreichend kleinen Umgebung der Anfangshyperfläche betrachtet, die Iteration gegen einen Fixpunkt von I konvergiert und daß dieser Fixpunkt die eindeutige Lösung der Gleichung mit den gegebenen Anfangsdaten ist. Wir werden jetzt einen Existenzsatz angeben für folgende symmetrisch hyperbolische Gleichung.

$$A^i(x,u)\partial_i u + B(x,u) = 0 \tag{7}$$

Satz 2 Sei v eine C^∞-Funktion auf einer offenen Teilmenge V der Hyperfläche $t = 0$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Eigenschaft, daß $A^0(x,v)$ positiv definit ist. Dann gibt es eine offene Umgebung U von V und eine eindeutige C^∞-Lösung der Gleichung (7) auf U, deren Einschränkung auf V mit v übereinstimmt.

Im allgemeinen existiert die Lösung einer solchen nichtlinearen Gleichung nur auf einer beliebig kleinen Umgebung der Anfangshyperfläche, wogegen die Lösung einer linearen Gleichung global existiert. Man muß natürlich das Wort 'global' sorgfältig definieren, damit die letzte Aussage einen präzisen Sinn hat. Wenn wir zum Beispiel die nichtlineare Wellengleichung $\Box u = F(u)$ auf dem Minkowski-Raum betrachten, bedeutet 'global' einfach, daß die Lösung auf dem ganzen Raum definiert ist. Die Nichtexistenz von globalen Lösungen ist eine Eigenschaft der Gleichungen. Es ist nicht nur so, daß die Beweistechnik versagt. Die Entstehung von Stoßwellen ist zum Beispiel der Grund dafür, daß bestimmte Gleichungen keine globalen differenzierbaren Lösungen zu gegebenen Daten besitzen. Auf jeden Fall haben wir folgende Aussage, die manchmal Cauchy-Stabilität genannt wird. Betrachten wir einfachheitshalber die oben eingeführte nichtlineare Wellengleichung. Nehmen wir an, daß wir eine Lösung dieser Gleichung auf dem Gebiet G haben, die zu bestimmten Anfangswerten auf der Hyperfläche $t = 0$ gehört. Das Gebiet G werde durch die Ungleichungen $-T \leq t \leq T$ definiert. Es gibt eine Umgebung dieser Anfangswerte in einer geeigneten Topologie derart, daß für Anfangswerte in dieser Umgebung eine Lösung der Gleichung auf dem ganzen Gebiet G existiert. Anders gesagt, wenn man die Daten ein wenig stört, wird der Bereich, wo die Lösung existiert, nicht kleiner. Es ist auch so, daß kleine Änderungen der Daten innerhalb dieser Umgebung zu kleinen Änderungen der Lösung führen. Dies bedeutet, daß die Abbildung von Daten in Lösungen stetig ist.

Zusätzliche Bemerkungen

1. Die Differenzierbarkeitklasse C^∞ ist natürlich für hyperbolische Gleichungen in dem Sinne, daß es eine große Klasse von Gleichungen gibt, für die diese Eigenschaft der Daten von den Lösungen geerbt wird. Die Differenzierbarkeitsklasse H^s_{loc} ist auch in diesem Sinne natürlich. Dabei ist eine Funktion der Klasse H^s_{loc} eine Funktion, die lokal dem Sobolev-Raum vom L^2-Typ, H^s, gehört. Diese Eigenschaft gilt nicht für C^s-Funktionen und auch nicht für die Sobolev-Räume vom L^p-Typ, $p \neq 2$ [1].
2. Die Randterme, die bei der Herleitung der Energieabschätzungen auftreten, sind etwas unangenehm. Man kann sie loswerden, indem man die Daten und die Koeffizienten der Gleichung außerhalb eines Kompaktums abändert, so daß sie periodisch werden[2]. Man arbeitet dann effektiv auf einem Torus, also auf einer Mannigfaltigkeit ohne Rand.
3. Im Beweis der Existenz und Eindeutigkeit für lineare Gleichungen ist es nötig, die Größe

des Gebiets zu kontrollieren, wo die analytischen Näherungslösungen existieren. (Der Satz von Cauchy-Kowalewskaya behauptet nur die lokale Existenz solcher Lösungen.) Man kann passende Näherungslösungen auch auf andere Art und Weise bekommen. Im ursprünglichen Beweis für symmetrisch hyperbolische Gleichungen hat Friedrichs[3] eine Differenzengleichung verwendet. Noch eine Methode findet man in [2], wo ein Glättungsoperator ('mollifier') benutzt wird.

4. Es gibt einen direkten Existenzbeweis für lineare symmetrisch hyperbolische Gleichungen[4]. Dieser Beweis beruht auf der Theorie 'abstrakter Entwicklungsgleichungen' in Hilberträumen. Nichtlineare Gleichungen kann man auch in diesem abstrakten Rahmen behandeln.

5. Der erste allgemeine und mathematisch einwandfreie Existenzbeweis für strikt hyperbolische und etwas allgemeinere Gleichungen stammt von Leray[5]. Er führt den Beweis der dazu nötigen Abschätzungen effektiv auf den entsprechenden Beweis für symmetrisch hyperbolische Gleichungen zurück. Dabei ist das Wort 'effektiv' nötig, weil der Begriff 'symmetrisch hyperbolisch' noch nicht existierte. In seinem Beweis benutzt er auch Techniken, die heute zur Theorie der Pseudodifferentialoperatoren gehören. Eine moderne Behandlung des strikt hyperbolischen Falls nach diesem Muster gibt es in [2].

6. Der Sinn, indem wir den Ausdruck 'strikt hyperbolisch' benutzen, ist der übliche (z.B. der von [6]). Wir sollten aber darauf hinweisen daß Leray diesen Ausdruck benutzt hat, um eine größere Klasse zu beschreiben.

7. Der Satz 1 gilt auch für Funktionen, die nur endlich oft differenzierbar sind[4]. Wir geben hier die entsprechenden Ergebnisse für strikt hyperbolische Gleichungen an. Die Aussage ist: wenn die Koeffizienten H^{s-1} sind und die Anfangsdaten H^s, so ist die Lösung H^s [5]. (Die Zahl s darf nicht zu klein sein, aber es reicht zum Beispiel, wenn $s > 1/2(n+5)$ ist.) Unter den Koeffizienten zählt auch irgendeine 'Quelle' oder 'rechte Seite' für die Gleichung. Es reicht nicht, eine Quelle der Klasse H^{s-2} zu haben, damit die Lösung H^s ist, egal wie glatt die anderen Koeffizienten oder die Daten sind. Es ist nicht schwer, ein Beispiel dafür zu konstruieren, da dieser Sachverhalt schon bei der normalen zweidimensionalen Wellengleichung zu beobachten ist.

8. Im Existenzbeweis für nichtlineare hyperbolische Gleichungen werden lokale Lösungen in Sobolevräumen konstruiert. Damit ist noch nicht gezeigt, im Gegensatz zum linearen Fall, daß es zu C^∞-Daten C^∞-Lösungen gibt. Der Bereich, wo die Lösung der Klasse H^s (für gegebene C^∞ Daten) definiert ist, könnte in Prinzip auf die leere Menge schrumpfen für $s \to \infty$. Daß dies nicht der Fall ist, ist von Choquet-Bruhat[7] gezeigt worden.

9. Es ist auch möglich, die Existenz von C^∞-Lösungen für nichtlineare hyperbolische Gleichungen direkt nachzuweisen, ohne eine explizite Iteration durchzuführen, mit Hilfe des Satzes von Nash-Moser[8]. Dieser Satz kann aufgefaßt werden als eine Version des Satzes über implizite Funktionen, die im Raum von C^∞ Funktionen gültig ist. In Sobolevräumen, wo der übliche Satz über implizite Funktionen zu benutzen wäre, funktioniert das analoge Argument nicht. Der Grund dafür ist der Verlust von Differenzierbarkeit, der in Bemerkung 7 angesprochen wurde.

10. Ob globale Lösungen der Gleichung $\square u = F(u)$ für alle Anfangsdaten existieren, hängt stark von der Gestalt der Funktion F ab. Im Fall $F(u) = -u^3$ in vier Dimensionen existieren Daten mit kompaktem Träger, für die keine entsprechende globale Lösung existiert.

Dagegen existieren globale Lösungen immer für solche Daten im Fall $F(u) = u^3$[9]. Ein neues Kapitel in der Erforschung globaler Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen ist durch die Arbeit von Klainerman[10] angeregt worden.

LITERATUR

[1] Fattorini,H.O. The Cauchy problem. Addison Wesley, Reading, Mass. (1983).

[2] Taylor,M.E. Pseudodifferential operators. Princeton University Press, Princeton (1981).

[3] Friedrichs,K.O. *Comm. Pure Appl. Math.* **7**,345 (1954).

[4] Kato,T. Arch. Rat. Mech. Anal. **58**,181 (1975).

[5] Leray,J. Hyperbolic differential equations. Princeton (1953).

[6] Hörmander,L. The analysis of linear partial differential operators, Vol.2, Springer, Berlin (1983).

[7] Choquet-Bruhat,Y. *Gen. Rel. Grav.* **2**,359 (1972).

[8] Hamilton,R.S. *Bull. Amer. Math. Soc.* **7**,65 (1982).

[9] Strauss,W. *in* Velo,G.& Wightman,A.S. Invariant wave equations. Springer, Berlin (1978).

[10] Klainerman,S. *Comm. Pure Appl. Math.* **33**, 43 (1980) und verschiedene spätere Arbeiten von verschiedenen Autoren in dieser Zeitschrift.