18. Offene Fragen

1.) Existenz asymptotisch einfacher Strahlungsraumzeiten

Es gibt Lösungen der Zwangsgleichungen auf R^3 mit Daten, die „nahe denjenigen des flachen Raumes“ sind.

$$h_{ab} = \delta_{\alpha\beta} + (1/r)\,{}^0h_{\alpha\beta} \ldots$$
$$k_{\alpha\beta} = (1/r^2)\,{}^0k_{\alpha\beta} + \ldots$$

Lösungen der Vakuumgleichungen zu solchen Daten existieren in einer Umgebung der Anfangsfläche, aber es ist nicht bekannt, ob diese Lösungen zeit- und lichtartig vollständig sind. Ist die globale Struktur ähnlich der des Minkowskiraumes? Die Antwort auf diese Frage hat große Bedeutung für die Theorie der Gravitationsstrahlung isolierter Systeme. In [6] wird bewiesen, daß für kleine Daten mit endlicher ADM-Masse und endlichem Drehimpuls die Lösungen geodätisch vollständig sind.

Betrachten wir Beispiele anderer Theorien:

1-dim Hydrodynamik: Es gibt beliebig kleine Daten, die in endlicher Zeit Schocks, daß heißt Singularitäten entwickeln. In [7] wird gezeigt, daß dies auch in 3 Dimensionen der Fall ist.

Yang-Mills Gleichungen: Globale Existenz für beliebige („ungeladene“) Daten auf dem Minkowskiraum wurde bewiesen.

Einsteingleichungen mit $\Lambda > 0$: Es gibt globale Lösungen nahe der De Sitter Lösung.

Das zentrale Problem im Falle der Einstein'schen Vakuumfeldgleichungen ist dies: Auch „beliebig kleine Daten“ haben einen $(1/r)$ Abfall im räumlichen Unendlichen! Die ist eine Folge der Positivität der ADM-Masse!

2.) Struktur der Singularitäten

Singularitätssätze sagen unter verschiedenen Bedingungen Krümmungssingularitäten voraus. Nichts über die typische Struktur ist bekannt, da in den entsprechenden Beweisen die genaue Form der Feldgleichungen gar nicht verwendet wird.

Es gibt keinen interessanten 1+1 Fall, der beispielsweise für die Hydrodynamik eine entscheidende Rolle spielt (Stoßrohr, Schocks).

3.) Beschreibung endlich ausgedehnter Körper

Das ist schon ein Problem für die nicht-relativistische Hydrodynamik!

In [8] wird bewiesen, daß das Anfangswertproblem für das Euler-Poisson-System mit polytroper Zustandsgleichung für Anfangsdaten (endlicher Differenzierbarkeit), deren Dichte kompakte Träger hat, lokal in der Zeit Lösungen hat. Für das Zweikörperproblem mit ausgedehnten, deformierbaren Körpern scheint kein entsprechender Satz bekannt zu sein.

In der Einsteinschen Theorie ist (außer im kugel.-stat. Fall) nicht einmal das Einkörperproblem behandelt worden; bis jetzt lassen sich in der AR endlich ausgedehnte Körper nicht exakt beschreiben.

LITERATUR

[1] R. Adler, M. Bazin, R. Schifer, *Introduction into General Relativity*, New York (1975)

[2] Y. Bruhat, The Cauchy Problem. In: *Gravitation: an introduction to current research*, L. Witten (ed.), New York 1962

[3] Y. Choquet-Bruhat, J.W. York, The Cauchy Problem. In: *General Relativity and Gravitation*, Vol.1, Held, A. (ed.) New York: Plenum 1980

[4] A. Fischer, J. Marsden, The initial value problem and dynamical formulation of general relativity. In: *General Relativity*, S. Hawking, W. Israel (eds.) Cambridge Univ. Press 1979

[5] H. Friedrich, *Commun. Math. Phys.* **91**, 445–472 (1983)

[6] D. Christodoulou, S. Klainermann, „The Global Nonlinear Stability on the Minkowski Space“, *Ann. Math.* To appear

[7] T. Sideris, *Commun. Math. Phys.* **101**, 475–485 (1985)

[8] Makino in *Patterns and Waves*, H. Fujii, H. Mimma, T. Nishida (eds.), North-Holland/Kinkuniya, 1986

14. Die Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen

Die Feldgleichungen sind Tensorgleichungen, stellen also Bedingungen an ein geometrisches Objekt, die Metrik. Erst wenn man ein Koordinatensystem gewählt hat, ergibt sich ein partielles Differentialgleichungssystem für die Komponenten der Metrik.

Wenn eine Tensordifferentialgleichung außer dem unbekannten Tensorfeld keine „gegebenen“ Tensorfelder oder Zusammenhänge in den Koeffizienten enthält, kann das Cauchyproblem für keine Hyperfläche eindeutig lösbar sein, denn es lassen sich Koordinatentransformationen durchführen, die auf einer Hyperfläche die Identität sind, außerhalb der Hyperfläche die Tensorkomponenten aber ändern. So läßt beispielsweise die Transformation $x^0 = x^{0\prime} + (x^{0\prime})^4 f(x^\beta)$ die Tensorkomponenten und die ersten drei x^0-Ableitungen auf $x^0 = 0$ ungeändert.

Die Gleichungen erlauben also kein sachgemäßes Cauchyproblem im früheren Sinn. *Eindeutigkeit* kann und soll dann *im geometrischen Sinne*, das heißt bis auf Koordinatentransformationen, gelten. Daraus ergibt sich die Frage, für welche Hyperflächen S es geometrische Objekte auf S gibt, die die Tensorfelder eindeutig bestimmen.

Im Falle der Einsteinschen Feldgleichungen: Welche geometrischen Objekte gibt es auf einer Hyperfläche S? Falls S raum- oder zeitartig ist, sind das die innere Metrik h und die Einbettungskrümmung k, das sind die erste und zweite Fundamentalform.

Falls S lichtartig ist, definiert S nur die entartete innere Metrik und keinen Tensor, der Ableitungen transversal zu S enthält.

Untersuchen wir zunächst die Struktur der höchsten Ableitungen der Gleichungen in einem beliebigen Koordinatensystem x^a, $(a, b = 0, 1, 2, 3$ und $\alpha, \beta = 1, 2, 3)$, um zu sehen, ob wir für $x^0 = 0$ den Satz von Cauchy-Kowalewskaya anwenden können.

$$\begin{aligned} R^a_{bcd} &= 2\partial_{[c}\Gamma^a_{d]b} + \text{ Terme in } g_{ab},\ \partial_c g_{ab} \\ 0 = 2R_{\alpha\beta} &= g^{00}\partial_{00} g_{\alpha\beta} + \dots \\ 0 = 2R_{\alpha 0} &= g^{0\beta}\partial_{00} g_{\alpha\beta} + \dots \\ 0 = 2R_{00} &= g^{\alpha\beta}\partial_{00} g_{\alpha\beta} + \dots \end{aligned}$$

Die nicht aufgeschriebenen Terme enthalten 1. Ableitungen nach allen Koordinaten, aber zweite Ableitungen nur nach x^β.

Die Hyperfläche $x^0 = 0$ ist charakteristisch, da $\partial_{00} g_{0a}$ fehlt! Da die Koordinaten beliebig waren bedeutet das, daß alle Hyperflächen charakteristisch sind. Deshalb können (nach einem allgemeinen Argument, vgl. S. 17) die Daten g_{ab}, $\partial_0 g_{ab}$ auf *keiner* Hyperfläche frei vorgegeben werden. Wir sehen ja auch an den obigen Gleichungen: Wenn längs $x^0 = 0$ überall $g^{00} = 0$ gilt, also eine Nullhyperfläche vorliegt, sind die sechs Gln. $R_{\alpha\beta} = 0$ *Zwangsbedingungen*, während für $g^{00} \neq 0$ auf $x^0 = 0$ die nach $\partial_{00} g_{\alpha\beta}$ aufgelösten Gln. $R_{\alpha\beta} = 0$, in $R_{0a} = 0$ eingesetzt, vier Zwangsbedingungen ergeben. Die weitere Analyse des Falls $g^{00} = 0$ führt zum charakteristischen Anfangswertproblem.

Um im Fall $g^{00} \neq 0$ weiterzukommen, benutzen wir, daß die g_{0a} — wie wir später sehen werden und man sich auch geometrische leicht klarmachen kann — durch Änderung der Koordinaten außerhalb der Anfangshyperfläche $x^0 = 0$ weitgehend beliebig gewählt werden können. Denken wir uns also die g_{0a} analytisch gegeben und betrachten zunächst das System $R_{\alpha\beta} = 0$ für die Unbekannten $g_{\alpha\beta}$. Darauf ist der Satz von Cauchy-Kowalevskaya anwendbar mit freien, analytischen Daten $g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$. Eine Lösung von $R_{\alpha\beta} = 0$ wird aber i.a. nicht auch die Gln. R_{0a} befriedigen; denn diese erlegen den Daten ja Zwangsbedingungen auf. Bestenfalls können wir hoffen, daß die Lösungen von $R_{\alpha\beta} = 0$ überall auch die Gln. $R_{0a} = 0$ erfüllen, falls die Daten diese vier Zwangsbedingungen auf $x^0 = 0$ befriedigen.

Um zu sehen, daß dieses „Wunder" tatsächlich zustandekommt, untersuchen wir zuerst die koordinatenunabhängige Bedeutung der Gleichungen $R_{0a} = 0$ oder, äquivalent dazu (für $g^{00} \neq 0$ und $R_{\alpha\beta} = 0$), der Gln. $G^o_a = 0$ längs $x^0 = 0$.

In beliebigen Koordinaten gelten die kontrahierten Bianchi-Identitäten ($G_{ab} = R_{ab} - 1/2 R g_{ab}$, $\nabla_b G^b_a = 0$) für alle Metriken,

$$\partial_0 G^0_a + \partial_\beta G^\beta_a + (G\Gamma)_a = 0$$

Die Ausdrücke G^0_a können keine zweiten Ableitungen nach x^0 enthalten, da in $\partial_\beta G^\beta_\alpha$ und $(G\Gamma)_a$ höchstens zweite x^0-Ableitungen vorkommen.

Falls $x^0 = 0$ raum- oder zeitartig ist, heißen die Gleichungen $G^0_a = 0$ „Zwangsbedingungen" oder „Zwangsgleichungen" und stellen Beziehungen zwischen g_{ab} und $\partial_0 g_{ab}$ auf der Hyperfläche $x^0 =$ const. dar.

Falls $x^0 = 0$ lichtartig ist, sind die Gleichungen $G^0_a = 0$ vier von Bondi's „main equations", das sind Propagationsgleichungen entlang der Nullgeodäten für transversale Ableitungen.

Falls $x^0 = 0$ raum- oder zeitartig ist, ergeben $G^0_a = 0$ unabhängig von Koordinaten Gleichungen zwischen der inneren Metrik $g_{\alpha\beta}$ und der Einbettungskrümmung $k_{\alpha\beta}$ der Hyperfläche; wir können sie ja schreiben als $G^b_a \partial_b \phi = 0$ längs $\phi = 0$.

Das sieht man am schnellsten, indem man Gaußkoordinaten bezüglich $x^0 = 0$ einführt. Dann gilt $g_{0\beta} = 0$, $g_{00} = \pm 1$,

$$ds^2 = \pm (dx^0)^2 + g_{\alpha\beta}(x^0, x^\sigma) dx^\alpha dx^\beta \quad .$$

Die Einbettungskrümmung ist

$$2k_{\alpha\beta} = \partial_0 g_{\alpha\beta} \quad .$$

Die Zwangsgleichungen sind (alle Operationen ∇ und Spuren bezüglich $g_{\alpha\beta}$):

„Impuls Zwangsgleichungen"

$$0 = G_{\alpha 0} = \nabla^\beta (k_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} k^\sigma_\sigma) \quad ,$$

„Energie Zwangsgleichung"

$$0 = 2G_{00} = k_{\alpha\beta} k^{\alpha\beta} - (K^\sigma_\sigma)^2 - {}^{(3)}R \quad .$$

Die Zwangsgleichungen sind offensichtlich Tensorgleichungen auf der 3-Mannigfaltigkeit $x^0 = 0$ für eine nicht ausgeartete Metrik $g_{\alpha\beta}$ und ein symmetrisches Tensorfeld $k_{\alpha\beta}$. Wir haben so die koordinatenunabhängige Formulierung der Zwangsgleichungen gefunden.

Die Gleichungen für die zweiten x^0-Ableitungen von $g_{\alpha\beta}$ sind in Gaußkoordinaten

$$0 = R_{\alpha\beta} = -\partial_0 k_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta} k^\sigma_\sigma + {}^{(3)}R_{\alpha\beta} \quad .$$

Nehmen wir an, daß „lapse“ g_{00} und „shift“ $g_{0\beta}$ irgendwelche Werte haben, so ergeben sich die ADM-Gleichungen, die wir nur angeben und nicht weiter verwenden wollen.

Die Metrik ist

$$ds^2 = \pm N^2 (dx^0)^2 + h_{\alpha\beta}(dx^\alpha + N^\alpha dx^0)(dx^\beta + N^\beta dx^0) \quad ,$$

die zweite Fundamentalform

$$k_{\alpha\beta} := (1/2) N^{-1} \left[\partial_0 h_{\alpha\beta} - \nabla_a N_\beta - \nabla_\beta N_\alpha\right] \quad .$$

Die Gleichungen werden in den Variablen

$$\pi^{\alpha\beta} := h^{1/2}(k^{\alpha\beta} - k h^{\alpha\beta})$$

formuliert ($h = \det(h_{\alpha\beta})$).

Die Entwicklungsgleichungen sind:

$$\begin{aligned}
\partial_0 h_{\alpha\beta} =& 2h^{-1/2} N(\pi_{\alpha\beta} - (1/2) h_{\alpha\beta}\pi) + 2\nabla_{(\alpha} N_{\beta)} \\
\partial_0 \pi^{\alpha\beta} =& - N h^{1/2} \left\{ {}^{(3)}R^{\alpha\beta} - (1/2)\, {}^{(3)}R h^{\alpha\beta} \right\} \\
& + (1/2) N h^{-1/2} h^{\alpha\beta} (\pi_{\rho\sigma}\pi^{\rho\sigma} - (1/2)\pi^2 \\
& - 2N h^{-1/2} \left\{ \pi^{\alpha\sigma}\pi^\beta_\sigma - (1/2)\pi\pi^{\alpha\beta} \right\} \\
& + h^{1/2} \left\{ \nabla^\alpha \nabla^\beta N - h^{\alpha\beta} \nabla^\sigma \nabla_\sigma N \right\} \\
& + h^{1/2} \nabla_\sigma \left\{ h^{-1/2} N^\sigma \pi^{\alpha\beta} \right\} - 2\pi^{\sigma(\alpha} \nabla_\sigma N^{\beta)}
\end{aligned}$$

Die Zwangsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
\pi^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta} - (1/2)\pi^2 - {}^{(3)}R\, h &= 0 \quad , \\
\nabla_\alpha (h^{-1/2}\pi^{\alpha\beta}) &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Zwangsgleichungen in analytischen Raumzeiten mit den Entwicklungsgleichungen verträglich sind. Das heißt es gilt:

Satz: Aus g_{ab} analytisch, (x^0, x^α) Koordinaten, $R_{\alpha\beta} = 0$ in einer Umgebung von $x^0 = 0$ und $G^0_a = 0$ auf $x^0 = 0$ (raum- oder zeitartig) folgt $G^0_a = 0$ in einer Umgebung von $x^0 = 0$.

Beweis:

Aus $R_{\alpha\beta} = 0$ folgt, daß alle G^a_b linear homogen durch G^0_a ausdrückbar sind:

$$
\begin{aligned}
G^0_0 &= 1/2 g^{00} R_{00} \\
G^0_\beta &= g^{00} R_{0\beta} \\
G^\alpha_\beta &= g^{0\alpha} R_{0\beta} - 1/2 \delta^\alpha_\beta (g^{00} R_{00} + 2 g^{0\lambda} R_{0\lambda}) \\
G^\alpha_0 &= g^{\alpha 0} R_{00} + g^{\alpha\lambda} R_{0\lambda}
\end{aligned}
$$

Die Bianchi-Identitäten

$$0 = \nabla_a G^a_b = \partial_0 G^0_b + \partial_\alpha G^\alpha_b - \Gamma^s_{ba} G^a_s + \Gamma^a_{as} G^s_b$$

sind deshalb ein lineares, homogenes System für G^0_b, auf das der Satz von Cauchy-Kowalewskaya angewendet werden kann. Da aber $G^0_b = 0$ auf $x^0 = 0$, ist $G^0_b \equiv 0$ die einzige Lösung.

Ohne Analytizität hat man für diese Gleichungen nicht ohne weiteres einen Eindeutigkeitssatz. (Vergleiche dazu das Beispiel: $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ auf S. 13.)

15. Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz im analytischen Fall

Es soll nun die Existenz von analytischen Lösungen der Vakuumfeldgleichungen gezeigt werden.

Satz 1: (x^0, x^β) lokale Koordinaten, analytische Daten $g_{\alpha\beta}(0, x^\lambda)$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}(0, x^\lambda)$ und beliebige analytische Funktionen $g_{0b}(x^0, x^\lambda)$, so daß die Zwangsgleichungen auf $x^0 = 0$ erfüllt sind. Sei weiter $g^{00} \neq 0$ und g_{ab} nicht ausgeartet auf $x^0 = 0$.

Dann gibt es eindeutig analytische Funktionen $g_{\alpha\beta}(x^c)$, welche auf $x^0 = 0$ mit den Daten übereinstimmen, so daß für die durch $g_{\alpha\beta}$ und g_{0b} definierte Metrik $R_{ab} = 0$ gilt.

Beweis: Der Satz von Cauchy-Kowalewskaya wird angewendet auf die Entwicklungsgleichungen $R_{\alpha\beta} = 0$ mit Daten, die die Zwangsgleichungen erfüllen, welche dann wie oben gezeigt erhalten bleiben.

Eine koordinatenunabhängige Version lautet so:

Satz 2: Sei S' eine analytische 3-Mannigfaltigkeit, h' eine nicht entartete Metrik und k' ein symmetrisches Tensorfeld, die analytisch sind und die Zwangsgleichungen erfüllen.

Dann gibt es eine analytische Vakuum-Raumzeit, in der eine Hyperfläche S existiert mit den folgenden Eigenschaften. Seien die auf S induzierte erste und zweite Fundamentalform h, k. Weiter existiert ein Diffeomorphismus von S' auf S, der h', k' auf h, k abbildet. Alle solchen Raumzeiten sind nahe S isometrisch.

Beweis:

Wählen wir im Satz 1 $g_{00} = -1$, $g_{0\beta} = 0$, so erhalten wir eine Lösung in Gaußkoordinaten, wenn wir auf S' lokale Koordinaten (x^β) einführen. Da Gaußkoordinaten zu einer Hyperfläche eindeutig sind, erhalten wir lokal genau eine Raumzeit, in der $x^0 = 0$ isometrisch zu einem Stück von S' ist.

Überdecken wir S' mit Koordinaten $V_{(j)}$, in denen h' und k' in Reihen entwickelbar sind, so erhalten wir Raumzeiten mit Metriken $g_{(j)}$. Daraus machen wir eine Raumzeit mit der in Gaußkoordinaten offensichtlichen Identifizierung.

Wir sehen nun auch, was die Wahl von g_{0b} im ersten Satz bedeutet: verschiedene Wahlen von „lapse und shift“, daß heißt von g_{0b} ergeben dieselbe Raumzeit in verschiedenen Koordinaten.

Um die Existenz analytischer Lösungen zu erhalten, müssen wir zeigen, daß es analytische Lösungen der Zwangsgleichungen gibt. Ein einfaches Beispiel:

Sei $k_{\alpha\beta} = 0$ und $h_{\alpha\beta}$ eine beliebige nicht ausgeartete 3-Metrik. Dann gilt ${}^{(3)}R = 0$ für $g_{\alpha\beta} = \Phi^4 h_{\alpha\beta}$, falls Φ die Gleichung $h^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi - 1/8R(h_{\alpha\beta})\Phi = 0$ erfüllt.

Dies ist eine elliptische oder Wellengleichung für Φ. Der Satz von Cauchy-Kowalewskaya kann verwendet werden, um analytische Lösungen zu bestimmen.

Damit haben wir gezeigt, daß es lokal analytische Lösungen der Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen gibt. Ist eine analytische Mannigfaltigkeit mit einer analytischen Metrik gegeben, so gelten die Feldgleichungen überall, falls sie in der Umgebung nur eines Punktes erfüllt sind.

16. Nichtanalytische Lösungen (C^∞, C^k)

Von der Physik her erwarten wir für das freie Gravitationsfeld hyperbolische Gleichungen. Nun sind aber die 6 Entwicklungsgleichungen in den geometrisch ausgezeichneten Gaußkoordinaten nach keiner der bekannten Definitionen hyperbolisch. Trotzdem werden die Gleichungen in dieser Form in der numerischen Relativitätstheorie und im Zusammenhang mit Quantisierungsfragen (kanonische Formulierung der Theorie) verwendet.

Ein Existenzbeweis für C^∞-Lösungen gelingt, wenn mittels Koordinatenbedingungen oder „Eichbedingungen" die Gleichungen hyperbolisch gemacht werden können.

Die spezielle Wahl der Eichbedingung ist irrelevant, da damit letztlich ein „geometrischer Satz" bewiesen wird. Es können beliebige Koordinatensysteme verwendet werden, um die Existenz von C^k oder C^∞ Lösungen nachzuweisen.

Die älteste erfolgreiche Eichbedingung besteht in der Verwendung „harmonischer Koordinaten", und dieser Weg soll hier beschrieben werden.

Für den Riccitensor gelten in einem beliebigen Koordinatensystem folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= {}^{(h)}R_{ab} + 1/2(g_{ai}\partial_b\Gamma^i + g_{bi}\partial_a\Gamma^i) \\ \Gamma^i &:= \Gamma^i_{rs}g^{rs} \\ {}^{(h)}R_{ab} &:= -(1/2)g^{rs}\partial_{rs}g_{ab} + H_{ab}(g,\partial g) \quad . \end{aligned}$$

Die Gleichungen ${}^{(h)}R_{ab} = 0$ sind ein quasilineares, hyperbolisches System, da der Hauptteil aus Wellengleichungen besteht, von denen wir in Abschnitt 13 gesehen haben, daß sie symmetrisch hyperbolisch gemacht werden können! Wir wissen also, daß die Gleichungen

$$0 = {}^{(h)}R_{ab} = -(1/2)g^{rs}\partial_{rs}g_{ab} + H_{ab}(g,\partial g)$$

zu Anfangsdaten $g_{ab}(0,x^\beta)$, $\partial_0 g_{ab}(0,x^\beta)$ lokal eindeutige C^∞ oder C^k Lösungen haben, falls $x^0 = 0$ raumartig für die Daten ist. Nun ist es im Gegensatz zum analytischen Fall entscheidend, daß die Anfangsfläche raumartig und nicht zeitartig ist. Die Gleichungen $0 = {}^{(h)}R_{ab}$ stellen 10 Entwicklungsgleichungen für alle metrischen Komponenten dar. Die Abhängigkeitsgebiete sind wie bei einer Wellengleichung mit der Metrik g_{ab}.

${}^{(h)}R_{ab} = 0$ würde $R_{ab} = 0$ implizieren, wenn für die mittels des quasilinearen Systems berechnete Metrik $\Gamma^i = 0$ gelten würde. Die Bedeutung dieser Bedingung ist

$$\Box x^i = g^{ab}\nabla_a\nabla_b(x^i) = g^{rs}\partial_{rs}\Gamma^i = 0 \quad .$$

Das ist eine lineare Wellengleichung für die Koordinaten. Folglich gibt es lokal in jeder Raumzeit Koordinaten (x^i) mit $\Gamma^i = 0$, „harmonische Koordinaten".

Wie kann man erreichen, daß für eine Lösung der Gleichungen ${}^{(h)}R_{ab} = 0$ auch noch $\Gamma^i = 0$ gilt? Wenn das überhaupt geht, dann nur durch spezielle Datenwahl!

Aus $0 = \nabla^b G_{ab}$ und $0 = {}^{(h)}R_{ab}$ ergeben sich Wellengleichungen für Γ^i,

$$g^{ab}\partial_{ab}\Gamma^i + B_r^{is}\partial_s\Gamma^r = 0 \quad .$$

(B_r^{is} eine Funktion von $g, \partial g$)

Aus $\Gamma^i(0, x^\beta) = \partial_0\Gamma^i(0, x^\beta) = 0$ folgt $\Gamma^i(x^0, x^\beta) \equiv 0$ wegen der Eindeutigkeit der Lösung. (Wieder geht die Raumartigkeit der Anfangsfläche ein!). Das heißt „Harmonizität propagiert“.

Zu Anfangsdaten $g_{ab}(0, x^\beta)$, $\partial_0 g_{ab}(0, x^\beta)$, für die $x^0 = 0$ raumartig ist und $\Gamma^i(0, x^\beta) = \partial_0\Gamma^i(0, x^\beta) = 0$ gilt, bekommen wir folglich eine Lösung von $R_{ab} = 0$. (Die Ableitungen $\partial_0\Gamma^i(0, x^\beta) = 0$ müssen mit den Entwicklungsgleichungen berechnet werden.)

Daß es solche Daten gibt, falls die Zwangsgleichungen erfüllt sind, ergibt sich so:

Hilfssatz: Sei h, k eine Lösung der Zwangsgleichungen. Dann gibt es $g_{ab}(0, x^\beta)$, $\partial_0 g_{ab}(0, x^\beta)$, so daß $\Gamma^i(0, x^\beta) = 0$ und $g_{\alpha\beta}(0, x^\beta) = h_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}(0, x^\beta) = k_{\alpha\beta}$ gilt.

Falls ${}^{(h)}R_{ab} = 0$ auf $x^0 = 0$, gilt $\partial_0\Gamma^i(0, x^\beta) = 0$.

Beweis: Sei in beliebigen, lokalen Koordinaten $h_{\alpha\beta}(x^\gamma)$, $k_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ die Lösung der Zwangsgleichungen. Wählen wir zuerst

$$g_{00}(0, x^\gamma) = -1, \quad g_{0\beta}(0, x^\gamma) = 0, \quad g_{\alpha\beta}(0, x^\gamma) = h_{\alpha\beta}, \quad \partial_0 g_{\alpha\beta}(0, x^\gamma) = k_{\alpha\beta} \quad .$$

Die ∂_0-Ableitungen von g_{0b} werden nun eindeutig so bestimmt, daß $\Gamma^i = 0$ auf $x^0 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
0 = \Gamma^i &= (\sqrt{-g})^{-1}\partial_a[(\sqrt{-g})g^{ab}\partial_b x^i = \partial_a g^{ai} + (1/2)g^{ai}g^{rs}\partial_a g_{rs} \quad , \\
0 = g_{ik}\Gamma^i &= -g^{ai}\partial_a g_{ik} + (1/2)g^{rs}\partial_k g_{rs} \quad , \\
0 = g_{ik}\Gamma^i &= -g^{0i}\partial_0 g_{ik} - g^{\alpha i}\partial_\alpha g_{ik} + (1/2)g^{rs}\partial_k g_{rs} \quad , \\
0 = g_{ik}\Gamma^i &= -g^{00}\partial_0 g_{0k} - g^{\alpha i}\partial_\alpha g_{ik} + (1/2)\left\{g^{00}\partial_k g_{00} + g^{\rho\sigma}\partial_k g_{\rho\sigma}\right\} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{für } k = 0: -g^{00}\partial_0 g_{00} - g^{\alpha i}\partial_\alpha g_{i0} + (1/2)\left\{g^{00}\partial_0 g_{00} + g^{\rho\sigma}\partial_0 g_{\rho\sigma}\right\} \quad , \\
&\text{für } k = \tau: -g^{00}\partial_0 g_{0\tau} - g^{\alpha i}\partial_\alpha g_{j\tau} + (1/2)\left\{g^{00}\partial_\tau g_{00} + g^{\rho\sigma}\partial_\tau g_{\rho\sigma}\right\} \quad .
\end{aligned}$$

Wir sehen aus den letzten beiden Gleichungen, daß $\partial_0 g_{0a}$ eindeutig bestimmt ist.

Nun fehlt noch $\partial_0\Gamma^i = 0$: Aus

$$R_{ab} = {}^{(h)}R_{ab} + 1/2(g_{ai}\partial_b\Gamma^i + g_{bi}\partial_a\Gamma^i)$$

folgt mit ${}^{(h)}R_{ab} = 0$, $\Gamma^a = \partial_\beta\Gamma^a = 0$ für $x^0 = 0(g_{00} = -1,\ g_{0a} = 0)$,

$$G_a^0 = -(1/2)g_{ab}\partial_0\Gamma^b \quad .$$

Sind also die Zwangsgleichungen erfüllt, gilt $\partial_0\Gamma^m = 0$.

Mit diesem Hilfssatz und dem allgemeinen Existenzsatz für quasilineare Wellengleichungen ergibt sich eine Lösung in speziellen Koordinaten. Die geometrische Version ist nun offensichtlich.

Satz 3: Sei S' eine glatte 3-Mannigfaltigkeit, h' eine Riemannsche Metrik und k' ein symmetrisches Tensorfeld, welche glatt sind und die Zwangsgleichungen erfüllen.

Dann gibt es eine glatte Vakuum-Raumzeit, in der eine Hyperfläche S existiert, so daß die darauf induzierte erste und zweite Fundamentalform isometrisch zu h', k' sind. Zwei verschiedene solche Lösungen sind in einer Umgebung von S isometrisch.

Beweis: Sei V_i eine Überdeckung von S' mit lokalen Karten. Mit dem Hilfssatz und dem allgemeinen Existenzsatz für quasilineare Wellengleichungen erhalten wir lokale Lösungen $\overset{(i)}{g}_{ab}$.

Falls wir auf $V_{(i)}$ verschiedene Koordinaten (x^β) und $(x^{\beta'})$ wählen, sind die dadurch bestimmten Lösungen g_{ab}, $g'_{a'b'}$ durch eine Koordinatentransformation verknüpft, denn: Die Koordinaten (x_β) bestimmt g_{ab} eindeutig mittels der Konstruktion im Hilfssatz; definieren wir bezüglich g_{ab} harmonische Funktionen $y^{a'}$ die mit $(x^{\beta'})$ und $(\partial_0 x^{\beta'})$ auf $x^0 = 0$ übereinstimmen. Transformieren wir g_{ab} in diese Koordinaten, so erhalten wir metrische Komponenten ${}^y g_{a'b'}$ welche dieselben Gleichungen und Anfangswerte erfüllen wie $g_{a'b'}$. Also gilt wegen der Eindeutigkeit der Lösung des quasilinearen Systems ${}^y g_{a'b'} = g_{a'b'}$.

Nachdem wir wissen, daß h', k' lokal eindeutige Vakuum-Raumzeiten bestimmen, können wir durch Identifizierung in Gaußkoordinaten eine eindeutige Raumzeit in einer Umgebung von $x^0 = 0$ definieren.

Ein „globaler Existenzsatz" ergibt sich durch Konstruktion — unter Verwendung des Zorn'schen Lemmas — einer „maximalen Entwicklung".

Satz 4: Zu glatten Cauchy-Daten h', k' auf einer 3-Mannigfaltigkeit S' gibt es genau eine glatte Raumzeit (M^4, g_{ab}), die diese Daten realisiert und Fortsetzung jeder anderen Fortsetzung ist. Es ist $M^4 = S' \times \mathbf{R}^1$, und jede zeit- oder lichtartige, nicht fortsetzbare Kurve schneidet S' genau einmal.

Solche Raumzeiten heißen „global hyperbolisch" und können unter Umständen fortgesetzt werden. Dann ist S aber nicht mehr „Cauchy-Fläche", daß heißt es gibt kausale Kurven, die S nicht treffen. (Beispiel: raumartiges Einheits-Hyperboloid im Minkowski-Raum.)

Ohne weiter darauf einzugehen sollen folgende, wichtigen Eigenschaften nur erwähnt werden:

Falls die Daten invariant unter einer Symmetrie sind, gibt es in der Lösung eine Symmetrie.

Hängen die Daten glatt von einem Parameter ab, so gilt das auch für die durch die Daten bestimmte Lösung.

Stationäre Vakuumlösungen, die C^3 sind, sind sogar analytisch.

Um eine Lösung zu erhalten, benötigen wir Lösungen der Zwangsgleichungen. Die 4 Gleichungen

$$0 = \nabla^\beta (k_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} k^\sigma_\sigma)$$
$$0 = k_{\alpha\beta} k^{\alpha\beta} - (k^\sigma_\sigma)^2 - {}^{(3)}R$$

für 12 Tensorkomponenten enthalten Koordinaten-Willkür, bestehend aus 3 Funktionen, die die Koordinaten in der Anfangsfläche festlegen und 1 Funktion, die diese verändert. Es bleiben 4 „freie Funktionen", welche die zwei „Freiheitsgrade des Gravitationsfeldes" bestimmen. (Je ein Paar „p, q"). Das paßt zum linearisierten Spin-2 Feld. Im allgemeinen können diese Freiheitsgrade aber nicht invariant charakterisiert werden.

Es gibt verschiedene Arten, die Variablen und Koordinaten zu wählen, um ein elliptisches System zu erhalten. Dafür können dann lokale und globale Existenzsätze bewiesen werden.

Wichtigste Eigenschaft von asymptotisch flachen Lösungen (auch mit Quellen) ist „die Positivität der ADM-Masse".

<u>Bemerkung</u>: Die Überlegungen und Ergebnisse dieses Abschnittes zeigen: Als „geometrische Charakteristiken" der Vakuumfeldgleichungen sind die Nullhyperflächen zu bezeichnen. Sie können kovariant dadurch charakterisiert werden (Übung), daß für ihre Konormalen der Rang des Hauptsymbols der Gl. $R_{\alpha\beta} = 0$ nicht maximal ist (was die Nichtauflösbarkeit von S. 17 verallgemeinert). Alternativ dazu kann man als Entwicklungsgln. die 14 Gln. ${}^{(h)}R_{ab} = 0$, $g^{rs}\partial_{rs}\Gamma^i = 0$ fdie Unbekannten $(g_{\alpha\beta}, \Gamma^i)$ nehmen, mit entsprechenden Zwangsgleichungen. Dann erhält man direkt, d.h. mit der Definition aus Abschnitt 6, die „richtigen" Charakteristiken.

17. Gleichungen mit Materie

Die Art der Quelle T_{ab} muß angegeben werden, wenn die Entwicklung von g_{ab} und T_{ab} bestimmt sein soll. Man muß sagen, ob T_{ab} eine Flüssigkeit, ein elektromagnetisches Feld oder dergl. beschreiben soll; sonst ist es nicht sinnvoll, nach Lösungen von $G_{ab} = T_{ab}$ zu fragen.

Für den Fall einer „idealen Flüssigkeit" lautet der Energieimpulstensor

$$T_{ab} = (\mu + p)u_a u_b + p g_{ab}, \quad \mu > 0, \quad (dp/d\mu) > 0 \quad .$$

Die 4 Entwicklungsgleichungen $\nabla^a T_{ab} = 0$ sind für eine beliebige Lorentzmetrik g_{ab} symmetrisch hyperbolisch für die Materievariablen.

Deshalb sind wie im Vakuum die Zwangsgleichungen erhalten, und lokale Existenz und Eindeutigkeit kann bewiesen werden.

Für das elektromagnetische Feld F_{ab} mit

$$T_{ab} = (1/4\pi)\{F_{ac}F_b^c - (1/4)g_{ab}F_{rs}F^{rs}\}$$

folgt $\nabla^a T_{ab} = 0$ aus den Maxwell-Gleichungen auf einer beliebigen Raumzeit. Wieder sind die Zwangsgleichungen verträglich mit der Entwicklung eines symmetrisch hyperbolischen Systems, und befriedigende Sätze können für das lokale Problem bewiesen werden.