Gleichung symmetrisch hyperbolisch, wäre u reell, so wäre ihr Realteil symmetrisch hyperbolisch und wir könnten, wie wir später sehen werden, die Eindeutigkeit der Lösung zeigen)!

iii) Zur Stabilität

Sei $\rho \in \mathbf{R}^+$ und $s \in \mathbf{N}$. Dann können wir die Funktionen

$$u_\rho(x, y, z) = (1+\rho)^{-(2+s)} e^{\rho(iy+z)}$$

als Lösungen einer einparametrigen Schar von Cauchy-Problemen mit Daten auf der Fläche $S = \{z = 0\}$ entweder für die Laplace-Gleichung

$$(a) \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) u_\rho = 0$$

oder für die Wellengleichung

$$(b) \quad (\partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2) u_\rho = 0$$

betrachten.

In beiden Fällen folgt für die Cauchy-Daten $(\partial_z)^k u(x, y, 0), k = 0, 1,$

$$|(\partial_x)^i (\partial_y)^j (\partial_z)^k u_\rho| \leq (1+\rho)^{-(2+\rho)} \rho^{k+j} \to 0 \qquad \text{für } \rho \to 0 \quad ,$$

wenn $i + j \leq s$, während für die Lösungen für $z > 0$ folgt

$$|u_\rho(x, y, z)| = (1+\rho)^{-(2+s)} e^{\rho z} \to \infty \qquad \text{für } \rho \to \infty \quad .$$

Bemerkungen:

Wir haben im Fall (a) Cauchy-Probleme für, wie wir später sehen werden, eine elliptische Gleichung und im Fall (b) Cauchy-Probleme für die Wellengleichung mit Daten auf einer zeitartigen Hyperfläche betrachtet. Die Cauchy-Daten zusammen mit ihren inneren Ableitungen auf der Anfangsfläche bis zur Ordnung s werden beliebig klein, wenn wir ρ hinreichend groß werden lassen, während gleichzeitig die Lösungen für $t > 0$ beliebig groß werden (und zwar für jedes fest gewählte, noch so kleine $t > 0$). Die Lösungen der betrachteten Cauchy-Probleme zeigen also ein instabiles Verhalten, das sowohl im Zusammenhang mit physikalischen Betrachtungen als auch für die Zwecke der numerischen Behandlung höchst unangenehm ist. Wir werden zu untersuchen haben, wie dieses Verhalten mit der Art der Gleichung und mit der gewählten Anfangshyperfläche zusammenhängt.

Die Beispiele legen nahe, unsere Liste von Grundfragen zu erweitern und nach der

EXISTENZ, EINDEUTIGKEIT, STABILITÄT, GLATTHEIT

von Lösungen des Cauchy-Problems zu fragen. Dabei werden wir diese Begriffe präzisieren müssen und auch etwas über ihre Abhängigkeit untereinander erfahren.