LAURENT VÉRON

QUELQUES THÈMES DE RECHERCHE RÉCENTS

1- Opérateurs de Schrödinger linéaires avec potentiels singuliers et problèmes avec données mesures. J'ai étudié avec C. Yarur [11] les conditions qui permettent de résoudre des problèmes de Dirichlet $-\Delta u+V(x)u=0$, dans un ouvert régulier G, $u_{|\partial G}=\mu$ lorsque μ est une mesure et V est un potentiel positif singulier au bord de G. Nous étudions aussi la mesure réduite, c'est à dire celle qui reste quand on remplace V par V_n :=Min{V,n}et qu'on passe à la limite. Les conditions sont de type capacitaire Par suite j'ai étendu avec K. Gkikas [138] ces résultats au problème $\partial_t u-\Delta u+V(x,t)u=0$, $u(.,0)=\mu$. Nous obtenons en particulier une caractérisation des mesures admissibles et des mesures réduites en terme de capacité de Fuglede, un théorème de trace et enfin une représentation des solutions dans le cas ou $0\leq V(x,t) \leq Ct^{-1}$ qui étend au cas parabolique des résultats d'Ancona dans le cas elliptique.

2- Caractérisation de la trace au bord pour des solutions d'équations semi linéaires stationnaires dans des ouverts irréguliers. Dans le travail [128] je développe avec M. Marcus une théorie de la trace au bord dans le cas d'ouverts Lipschitz via la mesure harmonique pour des équations elliptiques semi linéaires sous critiques. Dans le cas sur critique, nous avons développé dans [143] une approche capacitaire via des capacité de Bessel d'ordre élevé pour des ouverts polyhédraux. Pour des ouverts Lipschitz quelconques nous travaillons à la caractérisation via des capacité associées à des noyaux introduites par Fuglede.

3- Représentation capacitaire et trace initiale "précise" de solutions d'équations de diffusion semi linéaires. Le but est de construire un analogue de la théorie de la trace précise elliptique que j'ai développée avec M. Marcus depuis 2004 dans les deux articles: *Capacitary estimates of positive solutions of semilinear elliptic equations with absorption*, **J. Eur. Math. Soc. 6** , 483-527 (2004). *The precise boundary trace of positive solutions of the equation* $\Delta u=u^q$ *in the supercritical case,* **Contemporary Math. 446**, 345-383 (2007). Un des outils de cette construction est la quasi représentation par des séries capacitaires des solutions développée dans [137]. Dans le travail [142] et en collaboration avec K. Gkikas je construis une trace précise associée dans une topologie fine associée à la capacité de Bessel $C_{2/q,q'}$ et montre que toute solution positive de $\partial_t u-\Delta u+u^q=0$ ($q>1$) est sigma modérée, c'est à dire limite croissante de solutions avec donnée initiale mesure de Radon bornée. Ce résultat a été démontré pour l'équation stationnaire par B. Mselati ($q=2$), E. Dynkin ($1<q\leq 2$) et finalement par M. Marcus dans tous les cas $q>1$.

4- Equations elliptiques et paraboliques fractionnaires avec terme de réaction non linéaires.
Il s'agit que j'ai commencé à développer avec Huyuan Chen (Universidad de Chile, Santiago et Shanghai New-York University) dont j'ai co-encadré la thèse en collaboration avec P. Felmer. Nous avons d'étendu au laplacien fractionnaire des résultats d'existence de solutions, de caractérisation et/ou d'éliminabilité de singularités pour des équations semi linéaires. Ces travaux sont publiés dans [148], [150] et [151]. En collaboration avec Ying Wang et Huyuan Chen nous étudions les problèmes paraboliques semi linéaires associés du type $\partial_t u+(-\Delta u)^{\alpha}+h(u,t)=0$ avec $0<\alpha<1$ et données initiales mesures ν. Dans le cas $h(u,t)=t^{\beta}u^q$ avec $q>1$ et $\beta>-1$. Nous démontrons l'existence d'une solution très singulière dans le cas sous-critique. Ces travaux sont publiés dans [160]. Nous travaillons à démontrer son unicité ainsi qu'au cas des non linéarités sur-critques. En collaboration avec M. Garcia-Huidobro et Nathan Aguire (Pontificia Univ. Catolica Santiago), j'ai commencé l'étude de problème de diffusion linéaire avec flux non-linéaire au bord du type $\partial_t u-\Delta u=0$ dans Ωx(0,T) et $\partial u/\partial n+g(u)=\nu$ sur $\partial\Omega$. Ces travaux devraient conduire à une co-tutelle de thèse.

5- Equations de type Lane-Emden ou Hamilton-Jacobi impliquant des opérateurs quasi linéaires et des données mesures. Depuis de nombreuses années je m'intéresse aux opérateurs quasi linéaires de type p-Laplacien. Dans trois travaux récents (2006-2007) avec mon étudiante R. Borghol, j'ai caractérisé les singularités au bord des fonctions p-harmoniques et des solutions des équations quasi linéaires de type Lane-Emden. Dans le travail [145] nous caractérisons avec MF Bidaut-Véron et H. Nguyen Quoc, les mesures admissibles pour résoudre des équations du type $-\Delta_p u+|u|^{q-1}u=\mu$ où μ est une mesure. Cette caractérisation se fait en terme d'absolue continuité de la mesure par rapport à une capacité de type Lorentz-Bessel. L'outil principal est l'obtention d'estimations précises du potentiel de Wolff de la mesure dans des espaces de Lorentz. En collaboration avec M.F. Bidaut-Véron et M. Garcia Huidobro (Univ. Catolica Santiago) je travaille sur des équations de Hamilton-Jacobi quasi linéaires du type $-\Delta_p u+|Du|^q=0$. Dans les travaux [144], [151] et [157], nous caractérisons les singularités intérieures et/ou au bord de ces équations. Les singularités au bord sont associées à des solutions d'équations quasi linéaires non variationnelles sur la demi sphère que nous obtenons par des méthodes topologiques. Une des conséquences des estimations de gradient que nous obtenons par une combinaison de la méthode de Bernstein, de la formule des Böchner-Weïstzenbock et de la construction de sur solutions explosives à la Keller-Osserman est un théorème de croissance pour les fonctions p-harmoniques positives u sur des variétés riemanniennes complètes non compacte à courbure de Ricci minorée (M^n,g). Nous montrons que si $-(n-1)B^2 \leq Ricc\ (M)$, alors pour tout couple (x,a) dans M, on a

$$u(a)exp(-c_{n,p}Bd(x,a)) \leq u(x) \leq u(a)exp(c_{n,p}Bd(x,a))$$

où d est la distance géodésique et $c_{n,p}$ une constante positive qui ne dépend que de *n et p*.

6- Propagations de singularités pour des équations de diffusion non linéaires modélisant des milieux fissurés. Depuis 2006 j'ai développé avec A. Shishkov de l'Institut de Mathématiques Appliquées et de Mécaniquede Donetsk une collaboration portant sur l'étude des phénomènes de propagation de singularités des solutions d'équations du type $\partial_t u-\Delta u+h(x,t)\ u^q=0$. Avec $q>1$et $h(x,t)>0$ sauf sur une « fissure », c'est à dire sur une courbe (C) de dégénérescence. La question que nous étudions est de savoir si une singularité de type masse de Dirac infinie se propage ou non le long de (C). Le principe que nous montrons est que la propagation a lieu si la dégénérescence de $h(x,t)$ au voisinage de (C) est de l'ordre de $exp(-\delta^{-2}((x,t),C))$ où δ est la distance parabolique. Nous avons publié trois articles sur le sujet [112], [120] et [133]. Nous travaillons maintenant sur la caractérisation de la croissance maximale dans $\boldsymbol{R}^N$ des données initiales possibles pour qu'il existe une solution, peut être locale en temps, d'équations du type $\partial_t u-\Delta u+g(u)=0$ dans le cas où g est une fonction croissante « légèrement » sur linéaire à l'infini, par exemple $g(u)=u(ln\ u)^{\alpha}$ avec $1<\alpha\leq 2$. Un premier travail est publié dans [154]. Ce type de nonlinéarité présente la particularité qu'il existe une infinité de solutions, positives et régulières, du problème de Cauchy pour des données initiales non bornées (voir mes travaux [131] et [138] avec T. Nguyen-Phuoc).

7- Problèmes semilinéaires associés à des opérateurs de Hardy avec potentiel critique. Il s'agit d'un travail mené avec K. Gkikas actuellement en poste au CMM à Santiago. Nous caractérisons la mesure harmonique associée à l'opérateur $-\Delta u-\kappa d^{-2}(x)u=0$ dans un ouvert où d(x) est la distance au bord et $\kappa\leq 1/4$. Nous étudions le problème de Dirichlet semilinéaire avec données mesures au bord et donnons des conditions nécessaires et sufisantes pour que le problème $-\Delta u-\kappa d^{-2}(x)u+u^p=0$ dans Ω *et* $u=\nu$ sur $\partial\Omega$ admette une solution. Ces conditions s'expriment en terme de continuité de la mesure par rapport à une capacité de Besov fractionnaire. Ces travaux sont publiés dans [154], [155].

8- J'ai signé en 2009 un contrat avec l'éditeur World Scientific un contrat pour la publication d'un livre intitulé

Local and Global Aspects of solutions of Quasilinear Elliptic Equations

Pour l'instant la publication est retardée faute de temps pour la mener à bien. J'espère trouver le temps d'ici 2016 pour achever sa rédaction.