Chapitre 2 : LES GÉNÉRALITÉS du CALCUL des PROBABILITÉS

Le modèle univers fini n'est <u>pas suffisant</u>.

<u>Par exemple</u> : jouer à pile ou face jusqu'à ce qu'il sorte pile pour la 1ère fois. Cette expérience aléatoire a une <u>infinité d'éventualités</u> :

$$(P);(f,P);(f,f,P);(f,f,f,P);\dots;(\underbrace{f,\dots,f}_{n-1\text{ fois}},P);\text{ etc}\dots$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$.

Ici Ω est infini dénombrable. Mais Ω peut être infini non dénombrable et l'ensemble des événements n'est plus $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier.

L'ensemble des événements $\mathcal{F}$ est une partie seulement de $\mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisant certaines conditions convenables où les opérations entre événements sont encore possibles.

<u>Définition</u> : $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une <u>tribu</u> d'événements si :

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{F}$

(stabilité de $\mathcal{F}$ par réunions dénombrables d'événements)

<u>Exercice</u> : Si $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, montrer

1) que $\mathcal{F}$ est stable par intersections et réunions finies d'événements
2) que $\mathcal{F}$ est stable par intersections dénombrables d'événements

<u>Exemples</u> : 1) $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω

2) $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (<u>tribu triviale</u> : c'est la plus petite tribu sur Ω).

3) Soit $(A_i)_{i\in D}$ une partition finie ou dénombrable de Ω et soit

$$\mathcal{F} = \left\{ A \in \mathcal{P}(\Omega) \,\middle|\, \exists I \subset D \text{ tq } A = \bigcup_{i\in I} A_i \right\}$$

(avec la convention $\bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset$). $\mathcal{F}$ est <u>la tribu engendrée par la partition</u> $(A_i)_{i\in D}$.

4) si $\Omega = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$), $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ <u>la tribu de Borel</u> (la plus petite tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^n$: voir le cours d'intégration)

<u>Définition</u> : On appelle <u>espace probabilisé</u> tout triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où :

1) Ω est un ensemble (univers des possibles)
2) $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω
3) $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathcal{F}$ i.e. une application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ telle que :

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, 2 à 2 incompatibles (i.e. $\forall i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$), on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n). \quad (\sigma\text{-}\underline{\text{additivité}})$$

Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de A.

Exercice : Montrer que pour toute suite finie $A_1, \dots, A_N$ d'événements 2 à 2 incompatibles, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{additivité finie de } \mathbb{P}).$$

Théorème (Propriété de continuité de $\mathbb{P}$)

1) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante d'événements ($\forall n$, $A_n \subset A_{n+1}$) et si on note $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$, alors

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

2) Si (B_n) est une suite décroissante d'événements (i.e. $\forall n$, $B_{n+1} \subset B_n$) et si $B = \bigcap_{n\geq 0} B_n$, alors

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

démo : 1) $C_0 = A_0$, $C_1 = A_1 \setminus A_0, \dots, C_n = A_n \setminus A_{n-1}$, etc... sont 2 à 2 incompatibles et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n = A$. On applique alors la σ-additivité de $\mathbb{P}$ en notant que $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(C_i)$ est la somme partielle de la série de somme $\mathbb{P}(A)$

2) démo par passage au complémentaire.

2) Probabilité conditionnelle

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition : Pour tout $A \in \mathcal{F}$, le nombre

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (*)$$

est appelé probabilité conditionnelle de A sachant B

Proposition : $\forall B \in \mathcal{F}$ (fixé) tq. $\mathbb{P}(B) \neq 0$, l'application $\mathbb{P}_B$ définie par $(*)$ est une probabilité sur $\mathcal{F}$

(appelée probabilité conditionnelle sachant B)

démo :

1) $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$

2) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ 2 à 2 incompatibles $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n\cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\sum \mathbb{P}(A_n\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(A_n\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_B(A_n)$$

CQFD.

Exemple basique et origine de la probabilité conditionnelle : Soit E ensemble de N objets on tire au hasard un objet dans E ;
Si $A \subset E$ est un sous ensemble, la probabilité $\mathbb{P}(A)$ que l'objet tiré appartienne à A est :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card} A}{N}.$$

Mais si on apprend que l'objet tiré appartient à un sous ensemble $B \subset E$ (information), on doit reconsidérer la probabilité initiale et la remplacer par

$$\frac{\text{Card } A\cap B}{\text{Card } B} \quad ⊛$$

$$= \frac{\text{card}(A\cap B)/N}{\text{card} B/N} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

la probabilité ⊛ est $\mathbb{P}_B(A)$ (probabilité conditionnelle sachant B).

Définition : Soit $(A_i)_{i\in D}$ une suite finie ou dénombrable d'événements. On dit qu'ils forment un système complet si

1) les A_i sont deux à deux incompatibles
2) $\bigcup_{i\in D} A_i = \Omega$
3) $\forall i\in D$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$.

Théorème (formule de la probabilité totale)

Soit $(A_i)_{i\in D}$ un système complet d'événements. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in D} \mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

dém$^{\text{n}}$: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap\Omega) = \mathbb{P}(A\cap(\bigcup_{i\in D} A_i)) =$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in D}(A\cap A_i)\Big) = \sum_{i\in D} \mathbb{P}(A\cap A_i)$$

$$= \sum_{i\in D} \mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i). \quad \text{CQFD}.$$

Corollaire (formule de Bayes) Soit $(A_i)_{i\in D}$ un système complet d'événements et soit $A\in\mathcal{T}$. On a

$$\mathbb{P}(A_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j\in D} \mathbb{P}(A|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

dém$^{\text{n}}$: $\mathbb{P}(A_i|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A_i\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j\in D}\mathbb{P}(A|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$ cqfd

Remarque : c'est la formule de probabilité des causes (si on appelle A_i les "causes", sachant que A s'est réalisé, $\mathbb{P}(A_i|A)$ est la probabilité que la cause A_i soit responsable de A).

Exercice : 4 usines fabriquent des lampes. L'usine n° i ($1\le i\le 4$) produit $100p_i$ % de la production totale et il y a $100d_i$ % de déchet ~~dans~~ sa production. Étant donné une lampe défectueuse dans la production totale, la probabilité qu'elle provienne de l'usine n° i est égale à

$$\frac{d_i p_i}{d_1p_1 + d_2p_2 + d_3p_3 + d_4p_4}$$

3) Événements indépendants

Introduction : Soient A et B deux événements ($\mathbb{P}(A)>0$ et $\mathbb{P}(B)>0$). Si $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)$, B n'a pas d'influence sur A et dans ce cas
$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$
on voit alors que symétriquement $\mathbb{P}(B|A)=\mathbb{P}(B)$

Définition : Les événements A et B sont indépendants (relativement à la probabilité $\mathbb{P}$) si
$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Plus généralement

Définition : 1) des événements $A_1,\dots,A_n$ sont mutuellement indépendants (relatif à $\mathbb{P}$) si
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$$
2) Des tribus $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_n$ sont dites mutuellement indépendantes (relat. à $\mathbb{P}$) si :

$\forall i=1,\dots,n$, $\forall A_i\in\mathcal{F}_i$, $A_1,A_2,\dots,A_n$ sont indépendants.

Attention : Des événements peuvent être indépendants relativement à une probabilité $\mathbb{P}$ mais ne plus l'être relativement à une autre probabilité $\mathbb{P}'$.

4) Exemples typiques d'indépendance

Quand deux (ou plusieurs) expériences aléatoires n'ont rien à voir l'une avec l'autre, par exemple $\mathcal{E}_1$ = lancer un dé

$\mathcal{E}_2$ = lancer une pièce

ou $\mathcal{E}_1$ = lancer un dé

$\mathcal{E}_2$ = lancer le même dé une deuxième fois (dans les mêmes conditions)

alors, si A_1 est un événement relatif à $\mathcal{E}_1$ et A_2 " " " $\mathcal{E}_2$,

on peut postuler l'indépendance de A_1 et A_2.

On va modéliser mathématiquement cette idée par la notion d'espace probabilisé produit :

Soient $(\Omega_i,\mathcal{F}_i,\mathbb{P}_i)$ $(1\le i\le n)$ des espaces probabilisés. Considérons le produit cartésien :
$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\dots\times\Omega_n$$

Définition : 1) on appelle pavés mesurables, les sous ensembles de Ω de la forme $A_1\times A_2\times\dots\times A_n$ où pour tout $1\le i\le n$, $A_i\in\mathcal{F}_i$.

2) La tribu engendrée par les pavés mesurables est appelée tribu produit des tribus $\mathcal{F}_i$; on la note
$$\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2\otimes\dots\otimes\mathcal{F}_n.$$

Théorème (probabilité produit) : Il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu produit $\mathcal{F}$ telle que pour tout pavé mesurable $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, on ait :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_1(A_1)\,\mathbb{P}_2(A_2) \dots \mathbb{P}_n(A_n).$$

On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_n$ et l'appelle probabilité produit des probabilités $\mathbb{P}_i$.

Dém^n : c'est un résultat de théorie de la mesure (voir le cours d'intégration).

Définition : L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, $\mathcal{F} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ et $\mathbb{P} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i$, s'appelle l'espace probabilisé produit des espaces $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$

Remarque : Soit $A_i \in \mathcal{F}_i$. Identifions A_i à l'événement

$$\tilde{A}_i = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n$$

de la tribu produit $\mathcal{F}$ (ceci pour $i = 1, \dots, n$)

Alors :

$$\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \dots \cap \tilde{A}_n = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \dots \cap \tilde{A}_n) &= \mathbb{P}(A_1 \times \dots \times A_n) \\ &= \mathbb{P}_1(A_1) \dots \mathbb{P}_n(A_n) \\ &= \mathbb{P}(\tilde{A}_1) \dots \mathbb{P}(\tilde{A}_n)\end{aligned}$$

Ceci montre que les $\tilde{A}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ sont indépendants relativement à la probabilité $\mathbb{P}$

Application :

Supposons que l'espace probabilisé $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ modélise une expérience aléatoire $\mathcal{E}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ et supposons que les expériences $\mathcal{E}_i$ n'aient aucun lien de causalité les unes avec les autres. L'expérience $\mathcal{E}$ consistant en la succession $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ des expériences $\mathcal{E}_i$ est modélisée par définition par l'espace probabilisé produit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n$$

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_n.$$

Comme on l'a vu plus haut si $\tilde{A}_i$ $(1 \le i \le n)$ sont des événements tels que $\tilde{A}_i$ ne dépend que de la i^e expérience alors les $\tilde{A}_i$ $(1 \le i \le n)$ sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$

Exemple : les tirages avec remise

Considérons l'expérience aléatoire tirer au hasard n fois avec remise un élément dans un ensemble E

(par exemple tirer une carte ~~n fois avec remise~~ dans l'ensemble E des 32 cartes d'un jeu).

Le résultat ~~d'un tirage~~ des n tirages avec remise est un n-uplet

$$\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{où } x_i \in E \text{ est}$$

l'élément tiré au i^e tirage. L'univers des possibles est donc $\Omega = E \times \dots \times E = E^n$.

Les tirages sont au hasard donc la probabilité est équidistribuée sur Ω : $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}\,\Omega} = \frac{1}{|E|^n}$ $\quad (|E| = \text{card}\, E)$

Or cette probabilité est justement $U \otimes \dots \otimes U$ (n fois) où U est la probabilité équidistribuée sur E.

↳ exercice facile

Conclusion: l'expérience tirer au hasard n fois un élément avec remise dans E est modélisée par l'espace probabilisé produit

$$\Omega = E^n, \quad \mathbb{P} = U \otimes \dots \otimes U$$

(ici la tribu est $\mathcal{P}(\Omega)$ toutes les parties de Ω).

Exemple fondamental: Une urne contient N boules dont N_B blanches et N_R rouges ($N = N_B + N_R$). On fait $n (\geq 1)$ tirages avec remise

Montrer que la probabilité de tirer k boules rouges ($0 \leq k \leq n$) est égale à

$$C_n^k \left(\frac{N_R}{N}\right)^k \left(1 - \frac{N_R}{N}\right)^{n-k}$$

On modélisera correctement l'expérience aléatoire

Solution: Posons $p = \frac{N_R}{N}$ (donc $1 - p = \frac{N_B}{N}$).

A chaque tirage il y a 2 éventualités :

R = "boule rouge"

B = "boule blanche"

et $P(R) = p$ et $P(B) = 1 - p$ ce qui définit une distribution de probabilité sur l'ensemble à deux éléments

$$\Omega = \{R, B\}$$

Faire n tirages avec remise revient à considérer l'espace produit

$$\Omega^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \Omega\}$$

des n-uplets de lettre R ou B, qu'on munit de la probabilité produit

$$\mathbb{P} = P \otimes P \otimes \dots \otimes P = P^{\otimes n} \text{ (notation)}$$

l'événement

A_k = "tirer k boules rouges"

$$= \{\omega = (x_1, \dots, x_n) \mid \text{card}\{i ; x_i = R\} = k\}$$

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{\omega \in A_k} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Mais pour chaque $\omega \in A_k$, on a

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = P(\{x_1\})P(\{x_2\})\cdots P(\{x_n\})$$ déf de la proba produit

où dans ce produit il y a k termes qui valent p (et donc $n-k$ qui valent $1-p$). Donc

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^k(1-p)^{n-k} \quad \forall \omega \in A_k$$

D'où

$$\mathbb{P}(A_k) = (\text{card } A_k)\, p^k(1-p)^{n-k}$$

Mais $\text{card } A_k$ = nombre de façons de placer k boules rouges à n places possibles = nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments =

$$= C_n^k$$

Donc $\mathbb{P}(A_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ (*)

<u>Remarque</u>: Les événements A_k $(0 \leq k \leq n)$ forment un système complet. Le résultat trouvé (*) est bien en accord avec ce fait car

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1.$$

5) <u>Produit infini d'espaces probabilisés</u>

Il est difficile de généraliser la notion d'espace probabilisé produit à une infinité dénombrable $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'espaces probabilisés. On va étudier seulement un cas particulier :

Soit $(E, \mathcal{P}(E), P)$ un espace modélisant une expérience aléatoire à un nombre fini d'éventualités ($\text{card } E < +\infty$). <u>On répète cette expérience une infinité de fois</u> (dans les mêmes conditions) par exemple on joue à pile ou face une infinité de fois. Mathématiquement cette expérience a un sens :

Soit $\Omega = E \times E \times \cdots \times E \times \cdots = \prod_{i=1}^{+\infty} E$

le produit cartésien d'une infinité dénombrable de copies de l'ensemble E.

On appelle cylindres, les sous-ensembles de Ω de la forme

$$C = \prod_{i=1}^{+\infty} A_i$$

tels que $A_i \subset E$ et $A_i = E$ pour tout i assez grand.

On appelle <u>tribu produit</u> la tribu sur Ω engendrée par <u>les cylindres</u>. Notons la $\mathcal{F}$ (on ne se préoccupera pas de savoir quelle est la structure exacte de $\mathcal{F}$ pour l'instant)

<u>Théorème</u> : Il existe une <u>unique</u> probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu produit $\mathcal{F}$ telle que pour tout

cylindre $C = A_1 \times \dots \times A_{k_C} \times \prod_{i \geq k_C+1} E$, on ait

$$\mathbb{P}(C) = \prod_{i=1}^{k_C} P(A_i)$$

Dém^{n}: résultat admis.

<u>Remarque</u>: Comme dans le cas d'un produit fini d'espaces probabilisés, on voit que <u>des événements relatifs à des coordonnées différentes</u>, <u>sont des événements indépendants</u> (pour la probabilité $\mathbb{P}$).

<u>Définition</u>: L'expérience aléatoire consistant en une infinité de répétitions indépendantes de l'expérience $(E, \mathcal{P}(E), P)$ est par définition modélisée par l'espace produit infini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ défini ci-dessus.

<u>Exemples et Exercices</u>:

1) Temps d'attente du 1er succès : On répète une expérience à deux issues S (succès) ou E (échec) jusqu'au 1er succès. Sachant qu'à chaque coup, on a $P(S) = p$ et $P(E) = 1-p$ ($0 \leq p \leq 1$ fixé), et que les répétitions sont indépendantes, calculer la probabilité d'obtenir le 1er succès à la $k^{ième}$ tentative ($k \geq 1$).

<u>Solution</u>: on cherche la probabilité de l'événement

$$A_k = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{k-1} \cap S_k$$

où E_i = "échec au i^e coup" ($i = 1, \dots, k-1$)

et S_k = "succès au k^e coup")

Comme les événements E_i et S_k sont indépendants, on a

$$\mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1} p$$

<u>Exercice</u> (suite) : quelle est la probabilité que succès ne sorte jamais ?

Soit A = "succès arrive à un moment ou un autre"

On cherche $\mathbb{P}(\bar{A})$. Mais on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \quad p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Donc $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0$

<u>Exercice</u>: on procède à une suite illimitée de tirages avec remise dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Si à un certain moment on a tiré le 4, calculer la probabilité que le prochain nombre tiré différent de 4, soit le 7.

<u>Solution</u>: on modélise l'expérience par un espace probabilisé produit infini de $(E, \mathcal{P}(E), P)$ où $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ et P la probabilité uniforme (ou équidistribuée) sur E.

Soit A l'événement considéré. Examinons les différents cas possibles aboutissant à A : on peut avoir

$A_1 = (7)$

$A_2 = (47)$

$\vdots$

$A_n = (\underbrace{4, 4, \dots, 4}_{n-1}, 7)$ (le 7 arrive après $n-1$ 4)

etc...

Alors $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ (réunion d'évén^{ts} 2 à 2 incompatibles)

Mais $\forall n$, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{10^n}$

D'où $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}$.