CHAPITRE 1 Prérequis d'Analyse*

(I) Ensembles dénombrables.

Définition 1 : Un ensemble E est équipotent à un ensemble F, s'il existe une bijection de E sur F. Evidemment E est équipotent à E, si E est équipotent à F alors F est équipotent à E et si E et F sont tous les deux équipotents à G, alors E est équipotent à F.

Définition 2 : Un ensemble E est dit dénombrable s'il est équipotent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Soit E un ensemble dénombrable et $u : \mathbb{N} \to E$ une bijection. On écrira $u : n \longmapsto u_n$.
Comme $E = u(\mathbb{N})$ est l'ensemble image de $\mathbb{N}$ par u, on peut écrire $E = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ comme une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts.

Proposition 1 : Tout sous ensemble de $\mathbb{N}$ est fini ou dénombrable

démonstration : Soit $A \subset \mathbb{N}$. Supposons que A soit infini. Définissons par récurrence une application

* à étudier et consulter pendant tout le semestre

$n \longmapsto x_n$ de $\mathbb{N}$ dans A comme suit :

$x_0 =$ le plus petit élément de A

$x_1 =$ " " " $A \setminus \{x_0\}$.

$x_n =$ " " " $A \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$

etc...

Noter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n existe car sinon A serait fini. De plus $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ par construction, ce qui montre que l'application $n \longmapsto x_n$ ainsi construite de $\mathbb{N}$ dans A est <u>injective</u>.

De plus la suite d'entiers (x_n) étant strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \leq x_n$.

Prenons alors $a \in A$. D'après ce qui précède, $a \leq x_a$, donc a se trouve forcément dans la liste $x_0, x_1, \dots, x_a$ donc $a = x_m$ pour un entier $m \in \{0, 1, \dots, a\}$ ce qui montre que l'application $n \longmapsto x_n$ est <u>surjective</u> donc A est dénombrable.

<u>Corollaire 1</u> tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est fini ou dénombrable ; on dira d'un tel ensemble qu'il est <u>au plus dénombrable</u>.

<u>Corollaire 2</u> Soit f une application <u>injective</u> d'un ensemble A dans un ensemble dénombrable D. Alors A est au plus dénombrable.

<u>démonstration</u>: f est une bijection de A sur son image $f(A)$ qui est un sous ensemble de D. D'après le corollaire 1, $f(A)$ est au plus dénombrable; il en est de même de A.

<u>Exemples</u> : 1) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents une bijection explicite $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ est donné par $f(n) = n+1$ $(n \in \mathbb{N})$

2) $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ est dénombrable puisque c'est un sous ensemble infini de $\mathbb{N}$. Une bijection explicite $u : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ est $u(n) = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$.

<u>Corollaire 3</u> : Soit f une application <u>surjective</u> de $\mathbb{N}$ sur un ensemble A. Alors A est au plus dénombrable

<u>démonstration</u>: Pour tout $a \in A$, soit $f^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{N};\ f(x) = a\}$ l'image inverse de a. Les ensembles $f^{-1}(a)$, $a \in A$, forment une partition de $\mathbb{N}$. Désignons par n_a le plus petit élément de l'ensemble $f^{-1}(a)$.

L'application $a \longmapsto n_a$ est une injection de A dans $\mathbb{N}$

Il suffit d'appliquer le corollaire 2 pour obtenir le résultat.

<u>Remarque</u> (et exercice) : le corollaire 3 admet une réciproque évidente : si un ensemble A est au plus dénombrable il existe toujours une application surjective f de $\mathbb{N}$ sur A -

<u>Proposition 2</u> (et exemple) L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ est

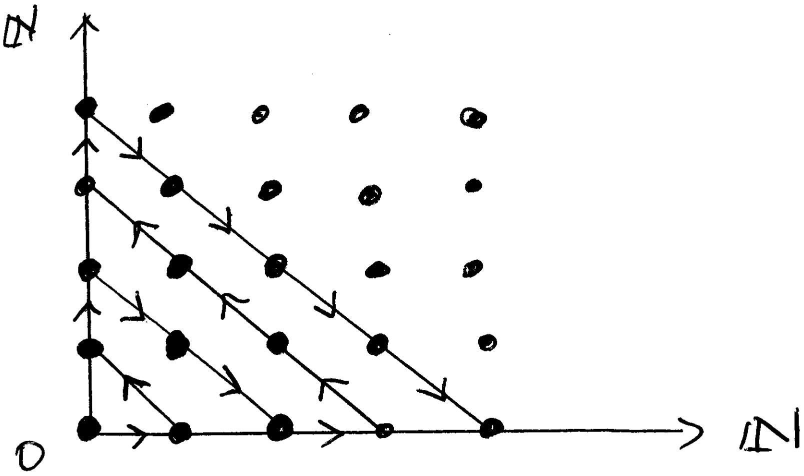
dénombrable.

<u>démonstration</u> : Il suffit de vérifier (exercice) que l'application $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + y$$

est une injection puis d'appliquer le corollaire 2. On obtient alors que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est au plus dénombrable. Comme manifestement $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est infini, il est dénombrable.

<u>Remarque</u> En fait cette application f est une bijection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ qu'on appelle <u>énumération en diagonale</u>. On peut visualiser le procédé de comptage des éléments de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en suivant les flèches dessinées ci dessous



<u>Remarque</u> : $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ est évidemment aussi un ensemble dénombrable.

<u>Application</u> : Tout ensemble A qui est en bijection avec $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ est un ensemble dénombrable

On peut écrire un tel ensemble sous la forme d'une matrice

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & \cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

à une infinité de lignes et une infinité de colonnes -

<u>Proposition</u> 3 (réunions d'ensembles dénombrables) : La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

<u>démonstration</u> : Soient A_n, $n \in \mathbb{N}$ des ensembles dénombrables et $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Pour chaque entier n, l'ensemble A_n est dénombrable donc on peut écrire ses éléments sous forme d'une suite

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}, \cdots, a_{nk}, \cdots\}$$

on peut écrire les éléments de A sous forme d'un tableau (matrice) les éléments de la ligne n étant ceux de l'ensemble A_n. Il est possible que certains éléments de A figurent <u>plusieurs fois</u> dans le tableau mais ce n'est pas grave puisque l'application $(i,j) \longmapsto a_{ij}$

de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ sur A définie par le tableau est surjective.
le corollaire 3 donne alors que A est au plus dénombrable.
Mais A est infini donc A est dénombrable.

Remarque: le résultat de la proposition 3 est encore valable avec des ensembles au plus dénombrables.

Corollaire 1 : l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.

démonstration : exercice

Proposition 4 Les intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point, ne sont pas des ensembles dénombrables

démonstration: Considérons d'abord l'intervalle $]0,1[$ et montrons qu'il n'est pas dénombrable par une méthode due à Cantor. Raisonnons par l'absurde supposons $]0,1[$ dénombrable:

$$]0,1[= \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

Pour chaque élément $x_k \in]0,1[$, considérons son développement décimal

$$x_k = 0, x_{k1}\, x_{k2}\, x_{k3} \cdots x_{kn} \cdots\cdots$$

où $x_{kn} \in \{0,1,\dots,9\}$ est la $n^{ième}$ décimale de x_k.
(on convient de ne pas utiliser de développements se terminant par des 9 à partir d'un certain rang),

On peut disposer les nombres x_k sous forme d'un tableau

$$(*)\left\{\begin{array}{llll} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right.$$

à une infinité de lignes et de colonnes. Construisons une suite (y_k) de la manière suivante si $x_{kk} = 1$, on pose $y_k = 2$ et si $x_{kk} \neq 1$, on pose $y_k = 1$. Alors le nombre x dont le développement décimal est

$$x = 0, y_1 y_2 \cdots y_k \cdots$$

appartient à $]0,1[$ et il est différent de tous les nombres de la liste $(*)$ ce qui est absurde donc $]0,1[$ n'est pas dénombrable. A fortiori $[0,1[$, $]0,1]$ et $[0,1]$ ne sont pas dénombrables donc aucun intervalle borné n'est dénombrable. On montrera en exercice qu'aucun intervalle non borné (en particulier $\mathbb{R}$) n'est dénombrable.

<u>Remarque et exercice</u> Quand un ensemble est infini, il peut être en bijection avec l'une de ses parties strictes. On a déjà vu l'exemple de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ et n'importe quel sous ensemble infini (Proposition 1). On exhibera une bijection explicite de $]0,1[$ sur $[0,1[$ et de $]0,1[$ sur $[0,1]$ (<u>indication</u> : prendre une suite $u_n \in]0,1[$ strictement croissante vers 1 et pour $x \in]0,1[$ poser $f(x) = x$ si $x \in]u_n, u_{n+1}[$ ou $]0, u_1[$).

La suite de ces prérequis est constituée de <u>rappels</u> sans démonstration. Il est <u>indispensable</u> de se reporter à son cours de Deug et de maîtriser les résultats qui suivent.

II) Nombres réels et suites de nombres réels

1) Bornes d'un ensemble de nombres réels

Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

<u>Définition 1</u> On dit que E est <u>majoré</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $x \leq M$. De même E est <u>minoré</u>, s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq x$ pour tout $x \in E$. Si E est <u>à la fois</u> majoré et minoré, on dit que E est <u>borné</u>

<u>Exercice</u>: Montrer que E est borné <u>si et seulement s'il</u> existe un nombre $A > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait

$$|x| \leq A.$$

<u>Proposition 1</u> (<u>propriété de la borne supérieure, resp. inférieure</u>) si $E (\subset \mathbb{R})$ est majoré (resp. minoré) l'ensemble des majorants (resp. des minorants) de E a un plus petit (resp. un plus grand) élément appelé <u>borne supérieure</u> (<u>resp. inférieure</u>) de E. Ce nombre noté $\operatorname{Sup} E$ (resp. $\operatorname{Inf} E$) possède la propriété caractéristique suivante :

1) $\forall x \in E, \ x \leq \operatorname{Sup} E$

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, (\operatorname{Sup} E) - \varepsilon \leq x$

(resp. 1') $\forall x \in E, \operatorname{Inf} E \leq x$

2') $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x \leq \operatorname{Inf} E + \varepsilon$

Exercice : la propriété de borne sup. est fausse dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Par exemple l'ensemble $E = \{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \; ; \; p^2 \leq 2q^2 \}$ n'a pas de borne sup. dans $\mathbb{Q}$ (Par contre dans $\mathbb{R}$, E a une borne sup égale à $\sqrt{2}$).

Théorème 1 Toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels qui est croissante et majorée admet une limite L. De plus $L = \sup\{u_n \, ; n \in \mathbb{N}\}$.

Théorème 2 (des segments emboîtés) Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite décroissante (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$) d'intervalles fermés bornés dont la longueur tend vers 0 (i.e $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$). Il existe alors un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\{x\} = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} I_n$.

2) Limite supérieure et limite inférieure d'une suite de réels.

Définition 2 : On dit qu'un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers n tels que $|u_n - \alpha| \leq \varepsilon$

Proposition 2 : α est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement s'il existe une suite extraite (u_{n_k}) de la suite (u_n) qui converge vers α.

Théorème 3 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de réels.

Il existe une valeur d'adhérence L de (u_n) qui est supérieure ou égale à tout autre valeur d'adhérence. On appelle L la limite supérieure de (u_n) et on note

$$L = \limsup_{n \to +\infty} (u_n) \quad \left(\text{ou } \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n\right)$$

De même, il existe une valeur d'adhérence ℓ de (u_n) qui est inférieure ou égale à toute autre valeur d'adhérence. On l'appelle limite inférieure de (u_n) et on la note

$$\ell = \liminf_{n \to \infty} (u_n) \quad \left(\text{ou } \underline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n\right)$$

De plus $L = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n$ (resp $\ell = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n$) est l'unique nombre satisfaisant la propriété suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers n tels que $u_n \geq L - \varepsilon$ et un nombre fini d'entiers m tels que $L + \varepsilon \leq u_m$.

(resp. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers n tels que $u_n \leq \ell + \varepsilon$ et un nombre fini d'entiers m tels que $\ell - \varepsilon \leq u_m$.).

<u>Définition 3</u> : Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est non majoré (resp. non minorée) on pose $\limsup_{n\to\infty} (u_n) = +\infty$ (resp. $\liminf (u_n) = -\infty$.

<u>Proposition 3</u> : la suite (u_n) de nombres réels est convergente si et seulement si $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n$

Dans ce cas $\lim_{n\to\infty} u_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$).

<u>Proposition 4</u> (formules donnant la lim sup et la lim inf)
Pour <u>toute</u> suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, on a

$$\limsup_{n\to\infty}(u_n) = \operatorname{Inf}_k \left(\operatorname{Sup}_{n\geq k} u_n \right)$$

$$\liminf_{n\to+\infty}(u_n) = \operatorname{Sup}_k \left(\operatorname{Inf}_{n\geq k} u_n \right)$$

<u>Théorème 4</u> (<u>critère de Cauchy</u>) : Pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels soit convergente(*), il faut et il suffit que <u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que

$$n \geq N_\varepsilon \text{ et } m \geq N_\varepsilon \text{ impliquent } |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

III) Ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

<u>Définition 1</u> : On dit que E est <u>ouvert</u> si pour tout $x \in E$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset E$.
L'ensemble E est dit <u>fermé</u> si son complémentaire est un ensemble ouvert.

<u>Proposition 1</u> (<u>structure des ouverts de $\mathbb{R}$</u>) tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion finie ou dénombrable <u>d'intervalles ouverts</u> deux à deux disjoints

<u>Proposition 2</u> (<u>caractérisation des fermés</u>) un ensemble

(*) vers un nombre réel

F $(\subset \mathbb{R})$ est fermé si et seulement s'il contient les points limites de toutes les suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F.

Définition 2 : Un ensemble C $(\subset \mathbb{R})$ fermé et borné s'appelle un ensemble compact.

Théorème 1 (de Bolzano-Weierstrass) Un ensemble C $(\subset \mathbb{R})$ est compact si et seulement toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C admet une valeur d'adhérence dans C.

Théorème 2 (de Borel-Lebesgue) Soit C un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$ et soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles ouverts recouvrant C (i.e. $C \subset \bigcup_{i\in I} E_i$). Alors il existe une sous famille finie $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_n}$ qui recouvre C.

Remarque : En topologie on prend plutôt la propriété de Borel-Lebesgue comme définition des ensembles compacts.

IV) Fonctions continues et uniformément continues

Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

Définition 1 : On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de E si tout intervalle de centre x contient une infinité de points de E.

Remarque (et exercice) : tout point d'accumulation est un point adhérent mais la réciproque est fausse !

<u>Définition 2</u> : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application et x_0 un point d'accumulation de E. On dit que f a <u>une limite l au point x_0</u> si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$ et $x \in E$ impliquent $|f(x) - l| \leq \varepsilon$. On écrit $l = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x)$

Si $x_0 \in E$, on dit que <u>f est continue en x_0</u> si f admet une limite l égale à $f(x_0)$.

Si $x_0 \notin E$ et si $l = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x)$ existe, on peut définir $f(x_0) = l$. La fonction obtenue sur $E \cup \{x_0\}$ est continue en x_0. On dit qu'on a "<u>prolongé f par continuité</u>" au point x_0.

Si tout point de E est point d'accumulation de E et si f est continue en tout $x \in E$, on dit alors que f est <u>continue sur E</u>.

<u>Théorème 1</u> (<u>des valeurs intermédiaires</u>) Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$. Alors f prend sur $[a, b]$ toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. Autrement dit pour tout nombre γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(c)$ (noter que c <u>n'est pas</u> forcément unique).

<u>Définition 3</u> : Soit E un ensemble de réels tel que tout tout $x \in E$ est point d'accumulation de E et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est <u>uniformément continue</u> sur E si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in E$ et tout $x \in E$ tels que $|x - x_0| \leq \eta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ [on notera qu'on demande que le nombre η soit <u>indépendant de x_0</u> contrairement à la définition de la continuité où le η dépend de x_0].

Une fonction f uniformément continue sur E est a fortiori continue sur E. La réciproque est fausse comme le montrent les deux exemples qui suivent.

<u>Exercice</u> 1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que la fonction $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, n'est pas uniformément continue.

3) Montrer que $f : x \mapsto \cos x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème 2</u> (de Heine) Soit $I = [a, b]$ un intervalle <u>compact</u>. Toute fonction continue sur I, est uniformément continue.

<u>Application</u> : Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier (on rappelle qu'une fonction g est en escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ telle g soit constante sur les intervalles $]t_i, t_{i+1}[$).

<u>Théorème 3</u> (<u>bornes d'une fonction continue sur un compact</u>)

Soit $f : C (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'ensemble C (tel que tout $x \in C$ est point d'accumulation de C).
On suppose que C est un ensemble <u>compact</u>. Alors f atteint ses bornes sur C. Autrement dit il existe des points x_M et x_m de C tels que

$$\sup_{x \in C} f(x) = f(x_M) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in C} f(x) = f(x_m)$$

(Ces points ne sont pas forcément uniques). Le cas le plus courant d'application de ce résultat est lorsque $C = [a, b]$ est un intervalle compact.

Pour terminer cette section <u>IV</u>, rappelons un résultat concernant la dérivabilité (on ne rappelle pas ce qu'est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert).

<u>Théorème 4</u> (<u>des accroissements finis</u>) Soit f une fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ $(a < b)$.
On suppose f dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(en particulier si $f(a) = f(b)$ on obtient le théorème de Rolle).

V Suites et séries de fonctions, convergence simple, convergence uniforme

<u>Définition 1</u> : On dit qu'une série $\sum_n u_n$ de nombres réels (resp. de nombres complexes) est convergente si la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ de ses sommes partielles est convergente vers un nombre réel (resp. un nombre complexe). On note alors $S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on appelle alors <u>somme de la série</u> $\sum_n u_n$. [Rappelons qu'une suite $v_n = x_n + iy_n$ de nombres complexes (où $x_n = Re(v_n)$ et $y_n = Im(v_n)$) est convergente si et seulement si les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$. La limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors $x+iy$ où $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.].

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le même sous ensemble E de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

<u>Définition 2</u> On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge simplement</u> vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) si pour tout $x\in E$, la suite de réels (resp. de complexes) $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ quand $n \to +\infty$.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ __converge uniformément__ vers f : $E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) si la suite $\varepsilon_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

La convergence uniforme implique la convergence simple mais la réciproque est fausse.

Une série de fonctions $\sum_n u_n(x)$, où pour tout n entier $u_n : E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction, est dite simplement (resp. uniformément convergente) vers une fonction $u : E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) si la suite $f_n := \sum_{k=1}^{n} u_k$ des sommes partielles est une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) qui converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction u quand $n \to +\infty$.

On écrit alors $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

__Théorème 1__ (__critère de Cauchy uniforme__) Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur E $(\subset \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est uniformément convergente si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que $n \geq N_\varepsilon$ et $m \geq N_\varepsilon$ impliquent $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

__Corollaire 1__ : Soit $\sum_n u_n$ une série de fonctions

avec $u_n : E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On pose $\alpha_n = \sup_{x\in E} |u_n(x)|$.
Si la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ est convergente alors la série de fonctions $\sum_n u_n(x)$ est uniformément convergente sur E

[Quand l'hypothèse $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$ est remplie on dit que la série de fonctions $\sum_n u_n(x)$ est normalement convergente]-

Une propriété importante (même fondamentale) de la convergence uniforme c'est la conservation de la continuité (ce qui est faux pour la convergence simple) :

Théorème 2 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $E (\subset \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que tout $x \in E$ est point d'accumulation de E et que pour tout entier n, f_n est continue sur E. Alors si (f_n) converge uniformément vers f sur E, la fonction f est continue sur E.

De même la dérivabilité est une propriété conservée quand la suite f_n converge et que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément :

Théorème 3 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un <u>intervalle</u> I de $\mathbb{R}$ et dérivables en tout point de I (dérivable à droite (resp à gauche) si I contient son extrémité droite (resp. gauche)). On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et que $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g définie sur I. Alors f est dérivable sur I et $f' = g$ sur I.

VI Autres prérequis non mentionnés dans ces rappels

Les techniques élémentaires pour le calcul des limites sont supposées connues : fonctions équivalentes, développements limités classiques, critères de convergence des séries numériques, développements en séries des fonctions usuelles e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^{-1}$, $\ln(1+x)$ etc...