Université de Tours - Préparation à l'Agrégation
Leçons d'Analyse et Probabilités
Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exercices

VRAI OU FAUX

1. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de centre 0.

a) Si f est dérivable à gauche et à droite au point 0, alors f est continue en ce point.

b) Si $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0 par valeurs strictement positives, alors f n'est pas continue à droite au point 0.

♦ *c*) Si f est lipschitzienne sur I, alors f est dérivable à droite et à gauche au point 0.

d) Si f est dérivable au point 0, il existe un nombre réel strictement positif α tel que f soit continue sur $[-\alpha, \alpha]$.

2. Soient f une fonction numérique de classe C^1 sur un intervalle I et x_0 un point de I.

a) Si $f'(x_0) = 0$, alors f admet un extrémum local au point x_0.

b) Si f admet un maximum local au point x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

c) Si f admet un extrémum local strict au point x_0 et si x_0 est intérieur à I, alors x_0 est un zéro isolé de f'.

d) Si f admet un extrémum local au point x_0 et si x_0 est un zéro isolé de f', alors cet extrémum local est strict.

♦ 3. Soient f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I et c un point intérieur à I.

a) Le rapport $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ tend vers $f'(c)$ si x et y tendent vers c en restant tels que $x \neq y$.

b) Même conclusion si l'on suppose que f est de classe C^1 sur I.

c) Même conclusion si l'on suppose que x et y tendent vers c en restant tels que $x < c < y$.

4. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

a) Les fonctions de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$ constituent une sous-algèbre pleine de l'algèbre unifère $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$.

b) Si f est de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$ et si g est de classe C^1 par morceaux sur un intervalle $[c, d]$ contenant $f([a, b])$, alors $g \circ f$ est de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$.

5. Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a, b]$ et c un point de $]a, b[$.

a) Si f est continue sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors f est continue sur $[a, b]$.

b) Même question lorsqu'on remplace continue par lipschitzienne.

c) Même question lorsqu'on remplace continue par dérivable.

d) Même question lorsqu'on remplace continue par de classe C^∞.

6. Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$ et de classe C^1 sur $]a, b]$.

a) Si $f'(x)$ admet une limite finie 1 lorsque x tend vers a, alors f est de classe C^1 sur $[a, b]$.

b) Si $f'(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a, alors f n'est pas dérivable au point a, et le graphe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a.

c) Si $f'(x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers a, alors f n'est pas dérivable au point a.

7. Soit f une fonction numérique continûment dérivable. Si f' est positive, alors f est croissante.

8. Soient f et g des fonctions numériques de classe C^1. Si $f' = g'$, alors $f - g$ est constante.

9. Soient f et g des fonctions numériques de classe C^1 sur un intervalle I.

a) Si f' coïncide avec g' sur le complémentaire d'une partie finie de I, alors $f - g$ est constante.

b) Même question si l'on suppose seulement que f et g sont dérivables sur I.

10. Soit f une fonction numérique de classe C^1 sur un intervalle I.

a) Si f est strictement croissante, f' est à valeurs strictement positives.

~~*b*) Si f' est strictement positive, f est strictement croissante.~~

~~*c*) Si f est strictement croissante, f' est strictement positive.~~

d) Si f' est à valeurs strictement positives, f est strictement croissante.

11. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle compact $[a, b]$.

a) Si f est continue, f est monotone par morceaux.

b) Si f est de classe C^∞, f est monotone par morceaux.

◆ *c*) Si f est de classe C^2 et si tous les zéros de f' sont simples (i.e. si la relation $f'(x) = 0$ implique la relation $f''(x) \neq 0$), alors f est monotone par morceaux.

◆ *d*) Si f est de classe C^∞ et n'admet aucun point plat (i.e. aucun point où toutes les dérivées de f s'annulent), f est monotone par morceaux.

e) Si f est de classe C^1 et non constante, il existe un intervalle non réduit à un point sur lequel f est strictement monotone.

◆ 12. Soient f une fonction numérique strictement croissante de classe C^1 sur $[a, b]$ et E l'ensemble des points x de $[a, b]$ tels que $f'(x) = 0$.

3

a) L'ensemble E est fini.

b) L'intérieur de E est vide.

13. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$.

a) Si f est de classe C^1 sur $]a, b[$, il existe un point c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Même conclusion si f est continue sur $[a, b]$ et si f est dérivable sur le complémentaire d'une partie finie de $[a, b]$.

c) Même conclusion si f est de classe C^1 sur $[a, b]$ à valeurs complexes.

d) Si f est continue sur $[a, b]$ et si f est dérivable à gauche et à droite en tout point de $]a, b[$, il existe un point c de $]a, b[$ tel que $f'_g(c)\, f'_d(c) \leqslant 0$.

14. Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b]$, telle que f' admette une limite l au point a. Alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$, où $c_x \in]a, x[$. Lorsque x tend vers a, c_x tend vers a. Donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers l lorsque x tend vers a.

15. Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle de centre 0, telle que $f(0) = 0$.

a) Si $f'(0) = 0$, alors $f(x)$ est négligeable devant x au voisinage de 0.

b) Si $f(x)$ est négligeable devant x au voisinage de 0, alors $f'(0) = 0$.

c) Si $f'(x)$ est négligeable devant x au voisinage de 0, alors $f(x)$ est négligeable devant x^2 au voisinage de 0.

d) Si $f(x)$ est négligeable devant x^2 au voisinage de 0, alors $f'(x)$ est négligeable devant x au voisinage de 0.

e) Si f est de classe C^2 et si $f(x)$ est négligeable devant x^2 au voisinage de 0, alors $f'(x)$ est négligeable devant x au voisinage de 0.

16. Soient f et g des fonctions numériques de classe C^1 sur un intervalle de centre 0, telles que $f(0) = g(0) = 0$.

♦ *a*) Si f' est négligeable devant g' au voisinage de 0, alors f est négligeable devant g au voisinage de 0.

♦ *b*) Si f' est équivalente à g' au voisinage de 0, alors f est équivalente à g au voisinage de 0.

Soit p un entier naturel non nul.

c) Si $f'(x)$ est équivalent à x^p au voisinage de 0, alors $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ au voisinage de 0.

d) Si $f(x)$ est équivalent à x^p au voisinage de 0, alors $f'(x)$ est équivalent à px^{p-1} au voisinage de 0.

17. Soit f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

a) Si $f(x)$ est négligeable devant x au voisinage de 0, alors f est dérivable à l'origine, et $f'(0) = 0$.

b) Si $f(x)$ est négligeable devant x au voisinage de 0, alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) Si $f(x)$ est négligeable à tout ordre au voisinage de 0, alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

d) Si, pour tout entier naturel p, $D^p f$ admet une limite à l'origine, alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

18. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$. Alors f' est continue sur $[a, b]$.

19. *a*) Toute fonction bornée et dérivable sur un intervalle $[a, b[$ se prolonge en une fonction bornée et dérivable sur $[a, b]$.

◆ *b*) Même question pour les fonctions de classe C^1 dont la dérivée est bornée.

◆ *c*) Même question pour les fonctions de classe C^∞ dont toutes les dérivées sont bornées.

20. Soit f une fonction numérique de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, admettant 0 pour limite en $+\infty$.

a) La fonction f' admet 0 pour limite en $+\infty$.

◆ *b*) Même question lorsqu'on suppose en outre que f est décroissante.

c) Si f' admet une limite a dans $\overline{\mathbb{R}}$ au point $+\infty$, alors $a = 0$.

d) Si f' est uniformément continue, alors f' admet 0 pour limite au point $+\infty$.

21. Soit f une fonction numérique de classe C^1 sur $[1, +\infty[$.

a) Si $f(x)$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$ et si f' admet une limite a dans $\overline{\mathbb{R}}$ au point $+\infty$, alors $a = 0$.

b) S'il existe un nombre réel non nul a tel que $f(x) \sim ax$ au voisinage de $+\infty$.

c) Si f' admet une limite finie a au point $+\infty$, alors $f(x) \sim ax$ au voisinage de $+\infty$.

d) Si $f(x)$ est prépondérant sur x au voisinage de $+\infty$, alors f' admet $+\infty$ pour limite au point $+\infty$.

22. Soit f une fonction numérique de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, telle que f' admette 0 pour limite au point $+\infty$.

a) Si $f(n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, alors $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Même question lorsqu'on suppose que $\lim_{n \to +\infty} f(\sqrt{n}) = 0$.

c) Même question lorsqu'on suppose que $\lim_{n \to +\infty} f(n^2) = 0$.

23. Reprendre le nº 22 lorsqu'on suppose que f est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et que f' est bornée.

Exercices tirés du livre " Léonhard EPISTEMON "
Analyse exercices et problèmes Vol 1 Cédic - Fernand Nathan
1983.